La geometría...

...un lugar para descubrir

PDF generado usando el kit de herramientas de fuente abierta mwlib. Ver http://code.pediapress.com/ para mayor información.
PDF generated at: Wed, 10 Aug 2011 10:10:14 UTC

Contenidos

Artículos

Referencias

Licencias de artículos

La definimos y conocemos sobre su historia

Geometría

La **Geometría** (del latín *geometrĭa*, que proviene del idioma griego γεωμετρία, *geo* tierra y *metria* medida), es una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras geométricas en el plano o el espacio, como son: puntos, rectas, planos, politopos (paralelas, perpendiculares, curvas, superficies, polígonos, poliedros, etc).

Alegoría de la Geometría.

Es la justificación teórica de la geometría descriptiva o del dibujo técnico. También da fundamento a instrumentos como el compás, el teodolito, el pantógrafo o el sistema de posicionamiento global (en especial cuando se la considera en combinación con el análisis matemático y sobre todo con las ecuaciones diferenciales).

Sus orígenes se remontan a la solución de problemas concretos relativos a medidas. Tiene su aplicación práctica en física aplicada, mecánica, arquitectura, cartografía, astronomía, náutica, topografía, balística, etc. Y es útil en la preparación de diseños e incluso en la elaboración de artesanías.

Historia

La geometría es una de las más antiguas ciencias. Inicialmente, constituía un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, áreas y volúmenes. En el Antiguo Egipto estaba muy desarrollada, según los textos de Heródoto, Estrabón y Diodoro Sículo. Euclides, en el siglo III a. C. configuró la geometría en forma axiomática, tratamiento que estableció una norma a seguir durante muchos siglos: la geometría euclidiana descrita en «Los Elementos».

El estudio de la astronomía y la cartografía, tratando de determinar las posiciones de estrellas y planetas en la esfera celeste, sirvió como importante fuente de resolución de problemas geométricos durante más de un milenio. René Descartes desarrolló simultáneamente el álgebra y la geometría, marcando una nueva etapa, donde las figuras geométricas, tales como las curvas planas, podrían ser representadas analíticamente, es decir, con funciones y ecuaciones. La geometría se enriquece con el estudio de la estructura intrínseca de los entes geométricos que analizan Euler y Gauss, que condujo a la creación de la topología y la geometría diferencial.

Axiomas, definiciones y teoremas

La geometría se propone ir más allá de lo alcanzado por la intuición. Por ello, es necesario un método riguroso, sin errores; para conseguirlo se han utilizado históricamente los sistemas axiomáticos. El primer sistema axiomático lo establece Euclides, aunque era incompleto. David Hilbert propuso a principios del siglo XX otro sistema axiomático, éste ya completo. Como en todo sistema formal, las definiciones, no sólo pretenden describir las propiedades de los objetos, o sus relaciones. Cuando se axiomatiza algo, los objetos se convierten en entes abstractos ideales y sus relaciones se denominan modelos.

Esto significa que las palabras "punto", "recta" y "plano" deben perder todo significado material. Cualquier conjunto de objetos que verifique las definiciones y los axiomas cumplirá también todos los teoremas de la geometría en cuestión, y sus relaciones serán virtualmente idénticas al del modelo *tradicional*.

Axiomas

En geometría euclidiana, los axiomas y postulados son proposiciones que relacionan conceptos, definidos en función del punto, la recta y el plano. Euclides planteó cinco postulados y fue el quinto (el postulado de paralelismo) el que siglos después –cuando muchos geómetras lo cuestionaron al analizarlo– originará nuevas geometrías: la elíptica (geometría de Riemann) o la hiperbólica de Nikolái Lobachevski.

En geometría analítica, los axiomas se definen en función de ecuaciones de puntos, basándose en el análisis matemático y el álgebra. Adquiere otro nuevo sentido hablar de puntos, rectas o planos. $f(x)$ puede definir cualquier función, llámese recta, circunferencia, plano, etc.

Tipos de geometría

Entre los tipos de geometría más destacables se encuentran:

- Geometría euclidiana
    - Geometría plana
    - Geometría espacial
- Geometría no euclidiana
- Geometría riemanniana
- Geometría analítica
- Geometría diferencial
- Geometría proyectiva
- Geometría descriptiva
- Geometría de incidencia
- Geometría de dimensiones bajas
- Geometría sagrada

Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Geometría**. Commons
- Wikcionario tiene definiciones para **geometría**.Wikcionario
- Wikiversidad alberga proyectos de aprendizaje sobre **Geometría**.Wikiversidad
- Portal:Matemática. Contenido relacionado con **Matemática**.
- Portal:Geometría. Contenido relacionado con **Geometría**.
- Geometría elemental en cnice.mec.es [1]
- Carlos Ivorra Castillo: Geometría [2]
- Geometría [3]

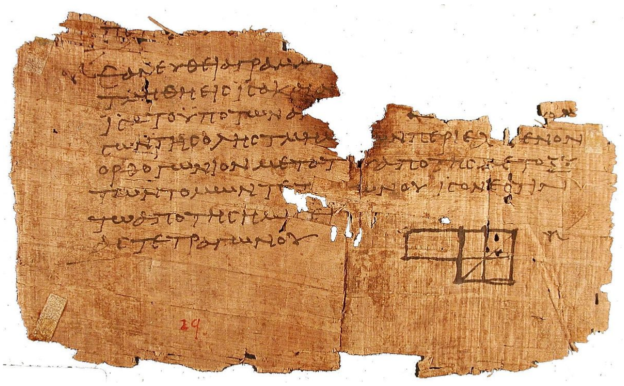
Referencias

[1] http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/index.htm
[2] http://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria.pdf
[3] http://www.forogeometras.com:

Tipos de geometría? Cómo no había una sola?

Geometría euclidiana

La **geometría euclidiana** (o **geometría parabólica**)[1] es aquella que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional. En ocasiones los matemáticos usan el término para englobar geometrías de dimensiones superiores con propiedades similares. Sin embargo, con frecuencia, geometría euclidiana es sinónimo de geometría plana y de geometría clásica.

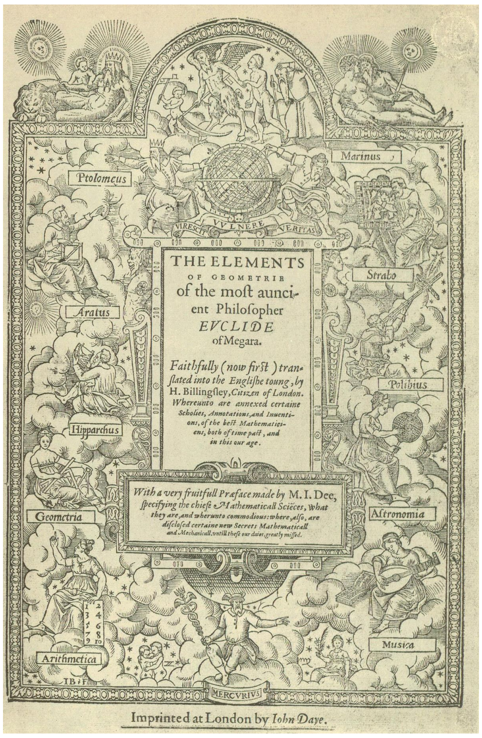


Fragmento de *Los elementos* de Euclides, escrito en papiro, hallado en el yacimiento de Oxirrinco (Egipto).

- Desde un punto de vista historiográfico, la geometría euclidiana es aquella geometría que postuló Euclides, en su libro *Los elementos*, dejando al margen las aportaciones que se hicieron posteriormente —desde Arquímedes hasta Jakob Steiner—.
- Según la contraposición entre método sintético y método algebraico-analítico, la geometría euclidiana sería, precisamente, el estudio por métodos sintéticos de los invariantes de un espacio vectorial real de dimensión 3 dotado de un producto escalar muy concreto (el frecuentemente denominado «producto escalar habitual»).
- Según el programa de Erlangen, la geometría euclidiana sería el estudio de los invariantes de las isometrías en un espacio euclidiano (espacio vectorial real de dimensión finita, dotado de un producto escalar).[2]

Axiomas

La presentación tradicional de la geometría euclidiana se hace en un formato axiomático. Un sistema axiomático es aquél que, a partir de un cierto número de proposiciones que se presuponen «evidentes» (conocidas como axiomas) y mediante deducciones lógicas, genera nuevas proposiciones cuyo valor de verdad es también lógico.



Portada de *Los elementos* de Euclides, publicada en 1570 por Sir Henry Billingsley.

Postulados

Euclides planteó cinco postulados en su sistema:

1. Dados dos puntos se puede trazar una y solo una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido.
3. Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes.
5. Si una recta, al cortar a otras dos, forma ángulos internos menores a dos ángulos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Este último postulado, que es conocido como el postulado de las paralelas, fue reformulado como:

> 5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.

Este postulado parece menos obvio que los otros cuatro, y muchos geómetras, incluido el propio Euclides, han intentado deducirlo de los anteriores. Cuando intentaron reducirlo al absurdo negándolo, surgieron dos nuevas geometrías: la elíptica, también llamada geometría de Riemann o riemanniana (dada una recta y un punto exterior a ella, no existe ninguna recta que pase por el punto y sea paralela a la recta dada) y la hiperbólica o de Lobachevsky (existen varias rectas paralelas que pasen por un punto exterior a una dada).

Limitaciones

Euclides asumió que todos sus postulados o axiomas eran autoevidentes y por tanto hechos que no requerían demostración. Sin embargo, resultó que el quinto postulado —si bien es compatible con los otro cuatro— en cierto modo es independiente. Es decir, tanto el quinto postulado como la negación del quinto postulado, son compatibles con los otros cuatro postulados. Las geometrías donde el quinto postulado no es válido se llaman geometrías no euclidianas.

Una limitación del trabajo de Euclides fue no reconocer la posibilidad de sistemas geométricos perfectamente consistentes donde el quinto axioma no era válido, es decir, para Euclides y los geómetras posteriores hasta el siglo XVIII pasó inadvertida la posibilidad de geometrías no euclidianas, hasta el trabajo de Nikolái Lobachevski, Gauss y Riemann.

Si bien durante el siglo XIX se consideró que las geometrías no euclidianas se consideraron un artefacto matemáticamente interesante, e incluso con cierto interés práctico pero limitado, como es el caso de la trigonometría esférica usada en astronomía. Pero en cierto modo se consideraba, que la geometría del espacio físico era euclidiana y por tanto las geometrias no euclidianas eran tan sólo un artificio abstracto interesante o útil para ciertos problemas pero en modo alguno descripciones realistas del mundo. Sin embargo, el trabajo de Albert Einstein, hizo ver que entre las necesidades de la física moderna están las geometrías no euclidianas, para describir el espacio-tiempo curvo.

Alguno de los errores de Euclides fue omitir al menos dos postulados más:

- Dos circunferencias cuyos centros estén separados por una distancia menor a la suma de sus radios, se cortan en dos puntos (Euclides lo utiliza en su primera construcción).
- Dos triángulos con dos lados iguales y los ángulos comprendidos también iguales, son congruentes (afirmación equivalente al concepto de movimiento, que Euclides usa para su teorema cuarto sin definir explícitamente).

Euclidiano y euclídeo

La Real Academia Española no recoge el adjetivo «euclídeo»,[3] aunque es un término de uso común que convive con el adjetivo «euclidiano».[4]

Véase también

- Geometría clásica
- Geometría no euclidiana

Enlaces externos

- Portal:Matemática. Contenido relacionado con **Matemática**.
- Portal:Geometría. Contenido relacionado con **Geometría**.
- Geometría euclídea [5]

Notas y referencias

[1] Siguiendo la analogía de las cónicas, una parábola es el caso límite entre una elipse y una hipérbola; en el mismo sentido que la geometría parabólica o euclídea es el caso límite entre la geometría elíptica y la geometría hiperbólica

[2] Hay que indicar que se puede dotar a un mismo espacio vectorial real de distintos productos escalares, así que, incluso con esta acepción, existe una enorme ambigüedad, al no quedar claro ni la dimensión del espacio (en principio cualquier dimensión finita) ni el producto a escalar al que nos referimos. Este término puede permitir que cosas que no se parecen en nada a lo que entendemos por geometría euclidiana pueda llamarse precisamente geometría euclidiana.

[3] Véase el aviso acerca del neologismo euclídeo (http://buscon.rae.es/draeI/SrvltGUIBusUsual?LEMA=euclídeo) en el *Diccionario de la lengua española* de la Real Academia Española).

[4] Véase el artículo euclidiano (http://buscon.rae.es/draeI/SrvltGUIBusUsual?LEMA=euclidiano) en el *Diccionario de la lengua española*.

[5] http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Geometria/marco_geometria.htm

Geometría euclidiana plana

La **geometría plana** es una parte de la geometría que trata de aquellos elementos cuyos puntos están contenidos en un plano. La geometría plana está considerada parte de la geometría euclidiana, pues ésta estudia los elementos geométricos a partir de dos dimensiones.

Una parte importante de la geometría plana son las construcciones con regla y compás.

Geometría espacial

La **geometría espacial** o **geometría del espacio** es la rama de la geometría que se ocupa de las propiedades y medidas de las figuras geométricas en el espacio tridimensional o espacio euclídeo. Entre estas figuras, también llamadas sólidos, se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera, el prisma, los poliedros regulares (los sólidos platónicos, convexos, y los sólidos de Kepler-Poinsot, no convexos) y otros poliedros.

La geometría del espacio amplía y refuerza las proposiciones de la geometría plana, y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio, la geometría descriptiva y otras ramas de las matemáticas. Se usa ampliamente en matemáticas, en ingeniería y en ciencias naturales.

Llamamos cuerpos geométricos a las figuras que se han de representar en el espacio tridimensional. Los cuerpos geométricos ocupan siempre un espacio.

Asimismo, los cuerpos que están huecos pueden albergar en su interior otros cuerpos en una cantidad que recibe el nombre de capacidad. Existe una relación directa entre la capacidad de un cuerpo y el volumen que éste ocupa.

La geometría espacial se basa en un sistema formado por tres ejes (X,Y,Z):

- Ortogonales (perpendiculares 2 a 2)
- Normalizados (las longitudes de los vectores básicos de cada eje son iguales)
- Dextrógiros (el tercer eje es producto vectorial de los otros 2)

Véase también

- Geometría

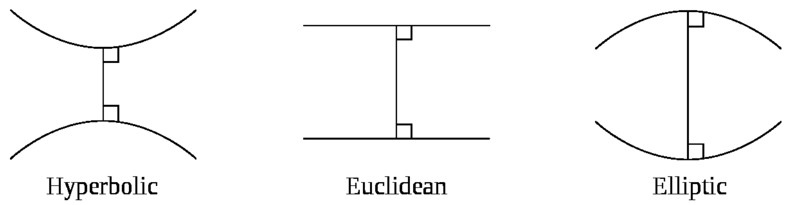
Enlaces externos

- Geometría del Espacio [1]

Referencias

[1] http://www.freewebs.com/geometria_del_espacio/

Geometría no euclidiana



Los tres tipos de geometrías homogéneas posibles, además de la geometría euclidea de curvatura nula, existen la geometría elíptica de curvatura positiva, y la geometría hiperbólica de curvatura negativa. Si se consideran geometrías no-euclídeas homogéneas entonces existe una infinidad de posibles geometrías, descritas por las variedades riemannianas generales.

Se denomina **geometría no euclidiana** o **no euclídea**, a cualquier forma de geometría cuyos postulados y propiedades difieren en algún punto de los establecidos por Euclides en su tratado *Elementos*. No existe un sólo tipo de geometría no euclídea, sino muchos, aunque si se restringe la discusión a espacios homogéneos, en los que la curvatura del espacio la misma en cada punto, en los que los puntos del espacio son indistinguibles pueden distinguirse tres tipos de geometrías:

- La **geometría euclidiana** satisface los cinco postulados de Euclides y tiene curvatura cero.
- La **geometría hiperbólica** satisface sólo los cuatro primeros postulados de Euclides y tiene curvatura negativa.
- La **geometría elíptica** satisface sólo los cuatro primeros postulados de Euclides y tiene curvatura positiva.

Todos estos son casos particulares de geometrías riemannianas, en los que la curvatura es constante, si se admite la posibilidad de que la curvatura intrínseca de la geometría varíe de un punto a otro se tiene un caso de geometría riemanniana general, como sucede en la teoría de la relatividad general donde la gravedad causa una curvatura no homogénea en el espacio tiempo, siendo mayor la curvatura cerca de las concentraciones de masa, lo cual es percibido como un campo gravitatorio atractivo.

Historia

El primer ejemplo de geometría no euclidiana fue la hiperbólica, teorizada inicialmente por Immanuel Kant[*cita requerida*], formalizada posterior e independientemente por varios autores a principios del siglo XIX tales como Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski, János Bolyai y Ferdinand Schweickard.

Los desarrollos de geometrías no euclídeas se gestaron en sus comienzos con el objetivo de construir modelos explícitos en los que no se cumpliera el quinto postulado de Euclides.

La geometría Euclideana había sido desarrollada por los griegos y expuesta por Euclides en la obra *Los elementos*. En su primera obra publicada, "Pensamientos sobre la verdadera estimación de las fuerzas vivas" (*Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte und Beurteilung der Beweise derer sich Herr von Leibniz und anderer Mechaniker in dieser Streitsache bedient haben*) (1746), Immanuel Kant considera espacios de más de tres dimensiones y afirma:

Una ciencia de todas estas posibles clases de espacio sería sin duda la empresa más elevada que un entendimiento finito podría acometer en el campo de la Geometría... Si es posible que existan extensiones con otras dimensiones, también es muy probable que Dios las haya traído a la existencia, porque sus obras tienen toda la magnitud y variedad de que son capaces.

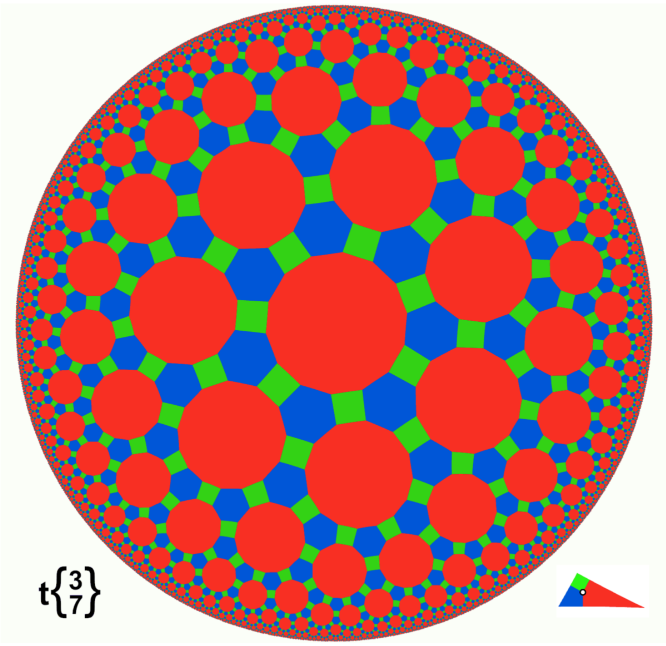
Esas posibles geometrías que Kant entrevé son las que hoy se llaman geometrías euclidianas de dimensión mayor que 3.

Por otra parte, ya desde la antigüedad se consideró que el quinto postulado del libro de Euclides no era tan evidente como los otros cuatro pues, al afirmar que ciertas rectas no se cortarán al prolongarlas indefinidamente, habla de una construcción mental un tanto abstracta. Por eso durante muchos siglos se intentó sin éxito demostrarlo a partir de los otros cuatro. A principios del siglo XIX, se intentó demostrarlo por reducción al absurdo, suponiendo que es falso y tratando de obtener una contradicción. Sin embargo, lejos de llegar a un absurdo se encontró que existían geometrías coherentes diferentes de la euclídea. Se había descubierto así la primera geometría no euclídea (en concreto el primer ejemplo que se logró era una geometría llamada hiperbólica).

Geometrías de curvatura constante

Geometría hiperbólica

A principios del siglo XIX, y de modo independiente, Gauss (1777-1855), Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai y Ferdinand Schweickard lograron construir la geometría hiperbólica, a partir del intento de negar el quinto postulado de Euclides y tratar de obtener una contradicción. En lugar de obtener una contradicción lo que obtuvieron fue una curiosa geometría en la que los tres ángulos de un triángulo sumaban menos de 180º sexagesimales (en la geometría euclídea los ángulos de cualquier triángulo suman siempre exactamente 180º).



Modelo del disco Poincaré para la geometría hierbólica con una teselación {3,7} de rombos truncados.

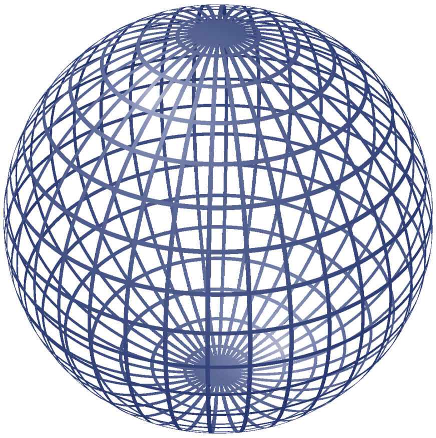
La naturalidad de esta geometría quedó confirmada a finales del siglo, cuando Beltrami demostró que la geometría hiperbólica coincide con la geometría intrínseca de cierta superficie y Klein dio la interpretación proyectiva de la geometría hiperbólica. Ambos resultados prueban que es tan consistente como la Geometría euclídea (es decir, si la geometría hiperbólica lleva a alguna contradicción, entonces la geometría euclídea también).

Algunos afirman que Gauss fue el primero en considerar la posibilidad de que la geometría del Universo no fuera la euclídea. Sabiendo que **en la geometría hiperbólica la suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos rectos**, se dice que subió a la cima de tres montañas con un teodolito, aunque la precisión de sus instrumentos no fue suficiente para decidir la cuestión con tal experimento. Sin embargo, otros afirman que cuando escribió que trataba de corregir los efectos de posibles curvaturas se refería a corregir el efecto de la curvatura terrestre en los estudios cartográficos que estaba realizando.

Geometría elíptica

La geometría elíptica es el segundo tipo de geometría no-euclídea homogénea, es decir, donde cualquier punto del espacio resulta indistinguible de cualquier otro. Una variedad de Riemann de curvatura positiva constante es un ejemplo de geometría elíptica. Un modelo clásico de geometría elíptica n-dimensional es la n-esfera.

En la geometría elíptica las líneas geodésicas tienen un papel similar a las líneas rectas de la geometría euclídea, con algunas importanes diferencias. Si bien la mínima distancia posible entre dos puntos viene dada por una línea geodésica, que además son líneas de curvatura mínima, el quinto postulado de Euclídes no es válido para la geometría elíptica, ya que dada una "recta" de esta geometría (es decir, una línea geodésica) y un punto no contenido en la misma no se puede trazar ninguna geodésica que no corte a la primera.



La esfera es un modelo de geometría elíptica bidimensional, los meridianos resultan ser líneas geodésicas mientras que los paralelos son líneas de curvatura no mínima.

Geometría euclídea

La geometría euclídea es claramente un caso límite intermedio entre la geometría elíptica y la geometría hiperbólica. De hecho la geometría euclídea es una geometría de curvatura nula. Puede demostrarse que cualquier espacio geométrico o variedad de Riemann cuya curvatura es nula es localmente isométrico al espacio euclídeo y por tanto es un espacio euclídeo o idéntico a una porción del mismo.

Aspectos matemáticos

Los espacios de curvatura constante el tensor de curvatura de Riemann viene dado en componentes por la siguiente expresión:

$$R_{ijkl} = C(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})$$

donde g_{ij} es el tensor métrico expresado en coordenadas curvilíneas cualesquiera. En tensor de Ricci R_{ij} y la curvatura escalar S son proporcionales respectivamente al tensor métrico y a la curvatura:

$$R_{ij} = (n-1)Cg_{ij}, \qquad S = n(n-1)C$$

y donde n es la dimensión del espacio.

Otro aspecto interesante es que tanto en la geometría hiperbólica, como en la geometría elíptica homogéneas el grupo de isometría del espacio completo es un grupo de Lie de dimensión $n(n+1)/2$, que coincide con la dimensión del grupo de isometría de un espacio Euclideo de dimensión n (aunque los tres grupos son diferentes).

Geometrías de curvatura no constante

Geometría riemanniana general

A propuesta de Gauss, la disertación de Riemann versó sobre la hipótesis de la Geometría. En su tesis, Riemann considera las posibles geometrías que infinitesimalmente (*i.e.* en regiones muy pequeñas) sean euclídeas, cuyo estudio se conoce hoy en día como geometrías riemannianas. Estas geometrías resultan en general no-homogéneas: algunas de las propiedades del espacio pueden diferir de un punto a otro, en particular el valor de la curvatura.

Para el estudio de estas geometrías Riemann introdujo el formalismo del tensor de curvatura y demostró que la geometría euclídea, la geometría hiperbólica y la geometría elíptica son casos particulares de geometrías riemanninanas, caracterizadas por valores constantes del tensor de curvatura. En una geometría riemanninana general, el tensor de curvatura tendrá valores variables a lo largo de diferentes puntos de dicha geometría.

Eso hace que la geometría no sea homogénea, y permite distinguir unos puntos de otros. Esto es relevante en la teoría de la relatividad general, ya que en principio es posible hacer experimentos de medición de distancias y ángulos que permitan distinguir unos puntos del espacio de otros, tal como especifican numerosos experimentos mentales imaginados por Einstein y otros en los que un experimentador encerrado en una caja puede realizar experimentos para decidir la naturaleza del espacio-tiempo que le rodea.

Finalmente un aspecto interesante de la goemetría riemanniana es que si la curvatura no es constante entonces el grupo de isometría del espacio tiene dimensión estrictamente menor que $n(n+1)/2$ siendo n la dimensión del espacio. En concreto según la relatividad especial un espacio-tiempo con una distribución muy irregular de la materia podría tener un grupo de isometría trivial de dimensión 0.

Geometría del espacio-tiempo y teoría de la relatividad

Basándose en la ideas y resultados de Riemann, hacia 1920 Einstein aborda en su Teoría de la Relatividad general la cuestión de la estructura geométrica del Universo. En ella muestra cómo la geometría del espacio-tiempo tiene curvatura, que es precisamente lo que se observa como campo gravitatorio, y cómo, bajo la acción de la gravedad, los cuerpos siguen las líneas más rectas posibles dentro de dicha geometría, líneas que se denominan geodésicas.

Además, la Ecuación de Einstein afirma que para cada observador, la curvatura media del espacio coincide, salvo un factor constante, con la densidad observada, dando cumplimiento así a la fantástica visión de Gauss: la geometría desentrañada por los griegos es la estructura infinitesimal del espacio; al generalizar dicha estructura geométrica, tiene curvatura.

Véase también

- Geometría euclidiana
- Geometría hiperbólica
- Geometría de Riemann
- Geometría elíptica

Cuerpos geométricos

Cuerpos geométricos

Los **cuerpos geométricos** son los elementos que, ya sean reales o ideales — que existen en la realidad o pueden concebirse mentalmente — ocupan un volumen en el espacio desarrollándose por lo tanto en las tres dimensiones de alto, ancho y largo; y están compuestos por figuras geométricas.

Clasificación

Los cuerpos geométricos se pueden clasificar en **poliedros** o **redondos.**

Poliedros

Los poliedros o cuerpos planos, son cuerpos geométricos cuyas caras son todas figuras geométricas planas exclusivamente. Entre los más conocidos:

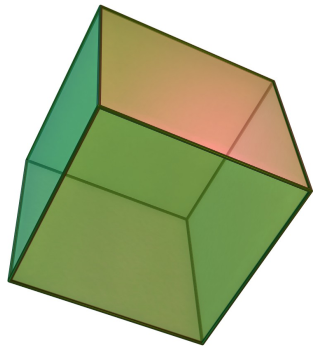
- Cubo
- Pirámide
- Prisma
- Paralelepípedo

Redondos

Los cuerpos redondos son aquellos que tienen, al menos, una de sus caras o superficies de forma curva.[*cita requerida*] Entre los más conocidos:

- Esfera
- Cono
- Cilindro
- Esferoide
- Toro

Cubo

Hexaedro regular o Cubo	
Familia: Sólidos platónicos	
 Imágen del sólido	
Caras	6
Polígonos que forman las caras	Cuadrados
Aristas	12
Vértices	8
Grupo de simetría	Octaédrico (O_h)
Poliedro dual	Octaedro

Un **cubo** o **hexaedro regular** es un poliedro de seis caras cuadradas congruentes, siendo uno de los llamados sólidos platónicos.

Un cubo, además de ser un hexaedro, puede ser clasificado también como paralelepípedo, recto y rectángulo, pues todas sus caras son de cuatro lados y paralelas dos a dos, e incluso como un prisma de base cuadrangular y altura equivalente al lado de la base.

El hexaedro regular, al igual que el resto de los sólidos platónicos, cumple el Teorema de poliedros de Euler, pues tiene seis caras, ocho vértices y doce aristas (8+6=12+2).

Volumen, área y desarrollo

Dado un cubo regular de arista **a**, podemos calcular su volumen **V** mediante la siguiente fórmula:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Y el área total de sus caras **A** (que es 6 veces el área de una de ellas, $\mathbf{A_c}$), mediante:

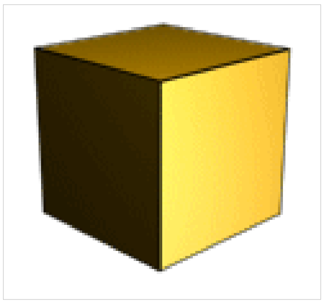
$$A = 6\ A_c = 6\ a^2$$

Simetría

Un hexaedro regular (o cubo) tiene quince ejes de simetría de orden cuatro: las rectas perpendiculares a cada par de caras paralelas por su punto medio; cuatro ejes de simetría de orden dos: las rectas que unen los centros de aristas opuestas; nueve planos de simetría; tres paralelos a cada par de caras paralelas por el punto medio de las aristas que las unen, y seis formados por los pares de aristas opuestas; y un centro de simetría. Esto hace que este cuerpo tenga un orden de simetría total de **48**: 2x(3x4+6x2).

Los elementos de simetría anteriores definen uno de los grupos de simetría octaédricos, el denominado $\mathbf{O_h}$ según la notación de Schöenflies.

Poliedro conjugado



- El poliedro conjugado de un hexaedro regular de arista **a** es un octaedro regular de arista **b**, tal que: $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$

Hipercubo

Un cubo en un espacio de cuatro dimensiones se denomina teseracto.

Dados típicamente cúbicos: estilo occidental, estilo asiático y dados usados en casinos.

Dados

Desde antaño y en numerosas culturas, el cubo es la forma más utilizada para dar forma a los dados utilizados en innumerables juegos, así como para dar forma a los dados utilizados en juegos de apuestas. En los juegos de rol la notación escrita del dado de seis caras es «D6».

Véase también

- Cubo unitario
- Cubo de Rubik
- Cubo Soma
- Anexo:Ecuaciones de figuras geométricas

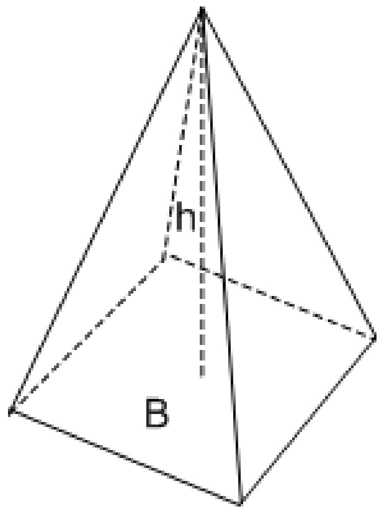
Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **cubos**. Commons

Pirámide (geometría)

Una **pirámide** es un poliedro limitado por una base, que es un polígono con una cara; y por caras, que son triángulos coincidentes en un punto denominado ápice.

El ápice o cúspide también es llamado *vértice de la pirámide*, aunque una pirámide tiene más vértices, tantos como el número de polígonos que lo limitan.



Pirámide cuadrangular.

Tipos de pirámides

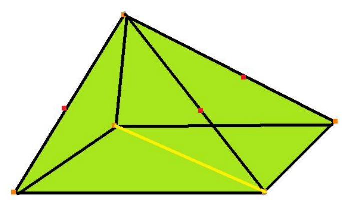
Una **pirámide recta** es un tipo de pirámide cuyas caras laterales son triángulos isósceles. En este tipo de pirámides la recta perpendicular a la base que pasa por el ápice corta a la base por su circuncentro.

Una **pirámide oblicua** es aquella en la que no todas sus caras laterales son triángulos isósceles.

Una **pirámide regular** es una pirámide recta cuya base es un polígono regular.

Una **pirámide convexa** tiene como base un polígono convexo

Una **pirámide cóncava** tiene como base un polígono cóncavo.

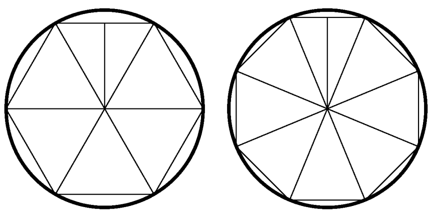


Pirámide oblicua. Los vértices están marcados en naranja y las aristas en rojo. La linea amarilla es una diagonal de la base.

Existen tres tipos de pirámides cuyas caras son triángulos equiláteros, con bases de 3, 4 y 5 lados respectivamente. Un tetraedro regular es una pirámide cuyas caras (base y caras laterales) son triángulos equiláteros.

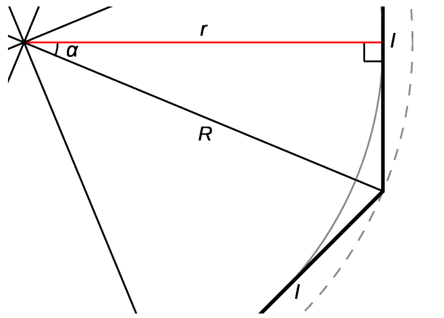
Área de un polígono regular

El área de un polígono regular puede calcularse en función de la longitud de cada lado y su número de lados. Un polígono regular de *n* lados puede dividirse en *n* triángulos isósceles (equiláteros en el caso del hexágono regular) cuyas bases son los lados del polígono regular. La altura de cada uno de estos triángulos es un apotema del polígono regular y divide cada uno de los triángulos isósceles en dos triángulos rectángulos, dividiendo así el polígono en *2n* triángulos rectángulos.



Partición de polígonos regulares en triángulos isósceles.

El área del polígono regular (A_b) es igual a la suma de las áreas de los triángulos rectángulos (A_t):



La línea roja es un apotema de este octógono.

$$A_b = 2\ n \cdot A_t = 2\ n\ \frac{\frac{l}{2}\ a}{2} = \frac{n}{2}\ l \cdot a$$

Donde a es el apotema del polígono regular. Para calcular la longitud del apotema se aplica la trigonometría.

Aparte: Calculemos la apotema a, donde α es el ángulo del vértice del triángulo rectángulo que coincide con el centro del polígono regular.:

$$tan(\alpha) = \frac{\frac{l}{2}}{a}$$

$$tan(\alpha) = \frac{l}{2 \cdot a}$$

$$a = \frac{l}{2 \cdot \tan(\alpha)}$$

Ahora reemplazando el valor de la apotema a en el área del polígono regular (A_b) tenemos:

$$A_b = \frac{n}{2}\ l \cdot a = \frac{n}{2}\ l \cdot \frac{l}{2 \cdot \tan(\alpha)} = \frac{n}{4}\ l^2 \cdot \cot(\alpha)$$

El valor del ángulo α resulta de dividir el ángulo completo (2π) por el número de triángulos rectángulos ($2n$), luego $\alpha = 2\pi/2n = \pi/n$.

(1) $$A_b = \frac{n}{4}\ l^2 \cdot \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Área lateral de una pirámide

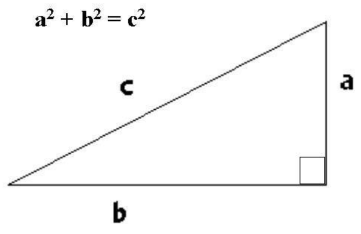
El área lateral de una pirámide es la suma de las áreas de las caras laterales.

En una pirámide regular, las caras laterales son triángulos isósceles. El área de cada cara es el semiproducto de su base (que es igual al lado de la base de la pirámide l), por su altura (que es el apotema de la pirámide a_p). El área lateral de una pirámide regular resulta de multiplicar el área de una de sus caras laterales por el número de caras laterales.

(2) $$A_l = n \cdot \frac{l \cdot a_p}{2} = \frac{p \cdot a_p}{2}$$

Donde a_p es el apotema de la pirámide y p es el perímetro de la base.

El apotema de la pirámide (a_p) puede calcularse a partir del apotema de la base (a_b) y de la altura de la pirámide (h) aplicando el teorema de Pitágoras.



Teorema de Pitágoras:
Altura de la pirámide: $h = a$.
Apotema de la base: $a_b = b$.
Apotema de la pirámide: $a_p = c$.

$$a_p^2 = a_b^2 + h^2$$

Área total de una pirámide

El área total de la pirámide es la suma del área de la base y el área lateral.

(3) $A = A_b + A_l$

En el caso de una pirámide regular, sustituyendo el área de la base (1) y el área lateral (2) en la ecuación (3), se obtiene:

$$A = \frac{n}{4}\, l^2 \cdot \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{p \cdot a_p}{2}$$

Volumen

El volumen de una pirámide puede obtenerse mediante cálculo diferencial. El área de un plano de corte transversal es directamente proporcional al área de la base (A_b) y al cuadrado de la distancia del plano de corte respecto al ápice de la pirámide. Esta distancia (d) es la diferencia entre la altura de la pirámide (h) y altura del plano de corte (z).

$$d = h - z$$

Por lo tanto, el área de un plano de corte transversal situado a una altura z por encima de la base es

$$A(z) = A_b\, \frac{d^2}{h^2} = A_b\, \frac{(h-z)^2}{h^2}$$

El volumen de una pirámide se puede hallar conociendo el área de su base y su altura, independientemente de la forma de la base y de la posición del ápice en un plano paralelo a la base.

$$V = \int_0^h A(z)\ dz = A_b \int_0^h \frac{(h-z)^2}{h^2}\ dz = -A_b \frac{(h-z)^3}{3h^2}\Big|_0^h$$

(4) $V = \dfrac{A_b\, h}{3}$

Esta fórmula también es válida para el cono, ya que no depende de la forma de la base, sino de su área.

Volumen de una pirámide regular

El volumen de una pirámide cuya base es un polígono regular puede calcularse a partir del lado del polígono regular que define su base y la altura de la pirámide. Sustituyendo el área de la base A_b (1) en la ecuación del volumen de la pirámide (4) se obtiene:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{4} \cdot l^2 \cdot \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot\ h$$
$$V = \frac{n}{12} \cdot l^2 \cdot h \cdot \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Centro de gravedad de una pirámide

El centro de gravedad de una pirámide de densidad uniforme está situado a una distancia de la base igual a un cuarto de su altura.[1]

$$z_G = \frac{h}{4}$$

Véase también

- Pirámide
- Tronco de pirámide
- Tetraedro
- Eudoxo de Cnidos
- Bipirámide (unión de dos pirámides por sus bases)

Referencias

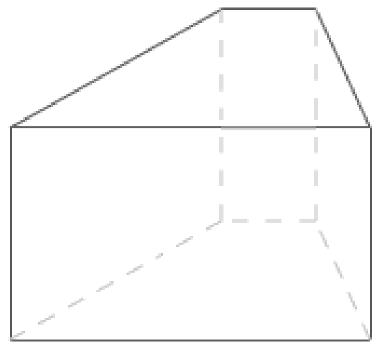
[1] Vázquez, Manuel; López, Eloisa (1995), *Mecánica para ingenieros*, Editorial Noela, Madrid, ISBN 84-88012-03-9.

Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Pirámide (geometría)**Commons
- Weisstein, Eric W., « Pirámide (http://mathworld.wolfram.com/Pyramid.html)» (en inglés), *MathWorld*, Wolfram Research.

Prisma (geometría)

Un **prisma**, en geometría, es un poliedro que consta de dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y de caras laterales que son paralelogramos.


Prisma.

En el caso en que las caras laterales sean rectangulares, se llama **prisma rectogularino**. El *prisma rectangular* o *cuboide*, y el *prisma octagonal* se encuentran entre los tipos de prisma recto, con una base rectangular y octagonal, respectivamente.

El volumen de un prisma recto es el producto del área de una de las bases por la distancia entre ellas (altura):

$$V = A_{base} \cdot h$$

Enlaces externos

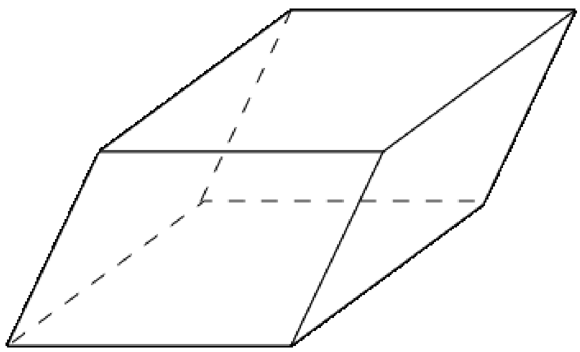
- Weisstein, Eric W., «Prisma [1]» (en inglés), *MathWorld*, Wolfram Research.

Referencias

[1] http://mathworld.wolfram.com/Prism.html

Paralelepípedo

Un **paralelepípedo** (del latín *parallelepipĕdum*, y este del griego antiguo παραλληλεπίπεδον[1] *parallēlepípedon*[2] ‘planos paralelos’) es un poliedro de seis caras (por tanto, un hexaedro), en el que todas las caras son paralelogramos, paralelas e iguales dos a dos. Un paralelepípedo tiene 12 aristas, que son iguales y paralelas en grupos de cuatro, y 8 [[Vértice (geometría)vértices.


Paralelepípedo oblícuo.

Se pueden dar tres definiciones equivalentes de un paralelepípedo:

- es un poliedro de seis caras (hexaedro), cada una de las cuales es un paralelogramo.
- es un hexaedro con tres pares de caras paralelas.
- es un prisma cuya base es un paralelogramo.

El paralelepípedo pertenece al grupo de los prismatoides, aquellos poliedros en los que todos los vértices se encuentran contenidos en dos planos paralelos.[3]

Tipos de paralelepípedos

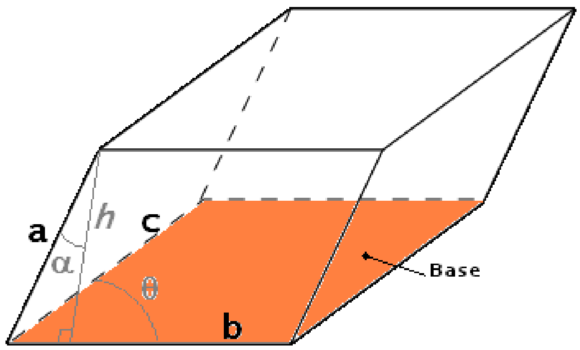
- Un paralelepípedo *recto* es aquel que tiene al menos alguna de sus aristas perpendicular a un par de caras. Es a su vez un prisma cuyas bases son paralelogramos.
- Un paralelepípedo *oblícuo* es aquel en el que ninguna de las aristas es perpendicular a las caras.

Casos particulares

- Un paralelepípedo en el que todas sus bases son rectángulos, y por tanto todas sus caras son perpendiculares entre sí, es un ortoedro. Es un caso particular del paralelepípedo recto.
- Un paralelepípedo en el que todas sus bases son rombos es un romboedro.
- Un paralelepípedo en el que todas sus bases son cuadrados es un *hexaedro regular* o cubo.

Volumen

En el caso más general, el volumen de un paralelepípedo se calcula multiplicando el área de cualquiera de sus caras por la altura respecto de dicha cara. La altura debe medirse en la perpendicular levantada respecto del plano que contiene la cara que se considera como base, como muestra la figura adjunta.



Forma de medir el volumen de un paralelepípedo oblícuo.

(1) $V = A \cdot h$

En el caso más sencillo de que todas las caras sean perpendiculares entre sí, el volumen se calcula multiplicando las longitudes de las tres aristas convergentes en cualquier vértice. Por lo tanto, si las tres aristas concurrentes a un vértice miden a, b y c entonces su volumen se calcula a través de la fórmula:

(2) $V = a \cdot b \cdot c$

Por ejemplo, si las aristas de un paralelepípedo recto son 2, 3 y 6 cm entonces el volumen se obtiene multiplicando 2 · 3 · 6 = 36 cm^3.

En el caso particular del cubo, en el que todas las aristas tienen la misma dimensión, el volumen es el lado elevado al cubo:

(3) $V = l^3$

La ecuación (4) es equivalente al valor absoluto del determinante de la matriz tridimensional formada por los vectores **a**, **b** y **c** como filas o columnas:

(5) $V = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right|$

Referencias

[1] « paralelepípedo (http://buscon.rae.es/draeI/SrvltConsulta?TIPO_BUS=3&LEMA=paralelepÃ-pedo)», *Diccionario de la lengua española* (vigésima segunda edición), Real Academia Española, 2001, , consultado el 23 de noviembre de 2010
[2] Lexico Publishing Group. « parallelepiped (http://dictionary.reference.com/browse/parallelepiped)» (en inglés). *Reference.com*. Consultado el 18 de diciembre de 2010
[3] Weisstein, Eric W., « Prismatoid (http://mathworld.wolfram.com/Prismatoid.html)» (en inglés), *MathWorld*, Wolfram Research, , consultado el 23 de noviembre de 2010.

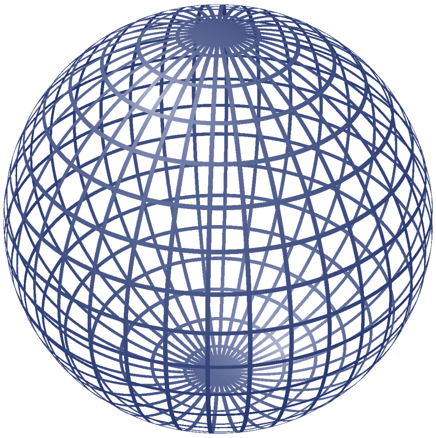
Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Paralelepípedo**. Commons
- Wikcionario tiene definiciones para **paralelepípedo**.Wikcionario
- Weisstein, Eric W., « Parallelepiped (http://mathworld.wolfram.com/Parallelepiped.html)» (en inglés), *MathWorld*, Wolfram Research, consultado el 23 de noviembre de 2010.

yokasta...

Esfera

En geometría, una **esfera** es un cuerpo geométrico limitado por una superficie curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro de la esfera.



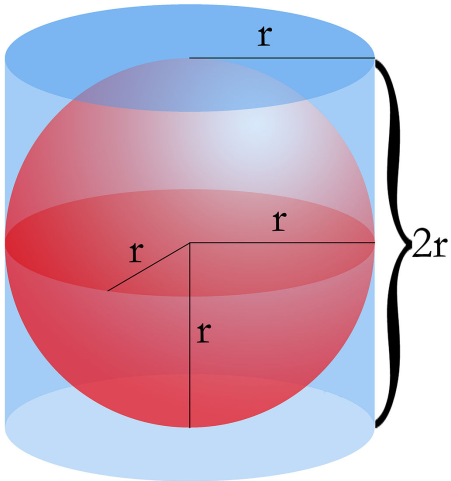
Proyección en dos dimensiones de una esfera definida mediante paralelos y meridianos.

La esfera, como sólido de revolución, se genera haciendo girar una superficie semicircular alrededor de su diámetro (Euclides, L. XI, def. 14).

Esfera proviene del término griego σφαῖρα, *sphaîra*, que significa pelota (para jugar). Coloquialmente hablado, se emplean palabras como *bola*, *globo* (globo terrestre), etc., para describir un volumen esférico.

Volumen

El volumen de una esfera es 2/3 del volumen del cilindro circunscrito a la esfera. Su base es un círculo del mismo diámetro que la esfera. Su altura tiene la misma medida que dicho diámetro:



Datos para hallar el área y volumen de la esfera respecto del cilindro circunscrito.

$$V = \frac{2}{3}(\pi r^2 \cdot 2r)$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

donde **V** es el volumen de la esfera y **r** el radio.

Esta relación de volúmenes se adjudica a Arquímedes.

Área

Arquímedes también demostró que el área de la esfera es dos tercios respecto al del cilindro. Entonces:

$$A = \frac{2}{3}(2r \cdot 2\pi r + 2 \cdot \pi r^2)$$

$$A = \frac{2}{3}(4\pi r^2 + 2\pi r^2)$$

$$A = \frac{2}{3}(6\pi r^2)$$

$$A = 4\pi r^2$$

El área de la esfera es también igual a la derivada de su volumen con respecto a *r*.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \int_0^r A(r)dr$$

$$4\pi r^2 = A(r).$$

Ecuación cartesiana

En un sistema de coordenadas cartesianas en un espacio euclídeo tridimensional, la ecuación de la esfera unitaria (de radio 1), con centro en el origen, es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Esta ecuación se obtiene considerando que en el punto M (x, y, z) de la esfera, el vector normal **OM** es igual a 1.

Generalizando, la esfera de radio **r**, de centro **Ω (a, b, c)** tiene como ecuación:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

La ecuación del plano tangente en el punto **M (x', y', z')** se obtiene mediante el *desdoblamiento de las variables*: en el caso de la esfera unitaria:

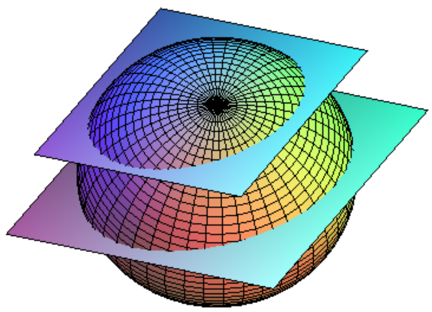
$$x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' = 0$$

y en el segundo ejemplo:

$$(x-a) \cdot x' + (y-b) \cdot y' + (z-c) \cdot z' = 0$$

Secciones

La intersección de un plano y una esfera siempre es un círculo. La esfera es el único volumen que tiene esta propiedad. Lógicamente, si el plano es tangente, el área de contacto queda reducido a un punto (puede considerarse el caso límite de la intersección).



Sección de una esfera por un plano.

Si el plano pasa por el centro de la esfera, el radio del círculo es el mismo que el de la esfera, **r**. En este caso, la circunferencia puede llamarse **ecuador** o **círculo máximo**.

Si la distancia **d**, entre el plano y el centro, es inferior al radio **r** de la esfera, aplicando el teorema de Pitágoras, el radio de la sección es:

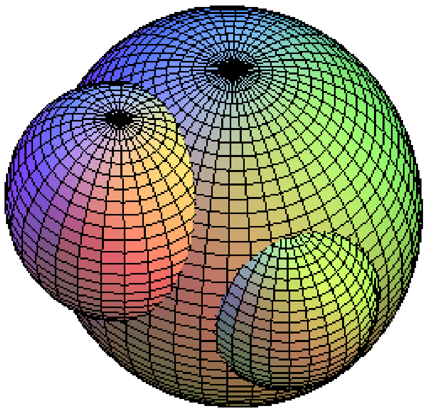
$$r' = \sqrt{r^2 - d^2}$$

Por otra parte, dos esferas se intersecan si:

$$d \le r + r'$$

y

$$r - r' \le d$$



Intersección de esferas.

(son las desigualdades triangulares, y equivalen a que ningún lado es superior a la suma de los otros dos), es decir, si existe un triángulo con lados que midan *r*, *r'* y *d*, donde *d* es la distancia entre los centros de las esferas, *r* y *r'* sus radios.

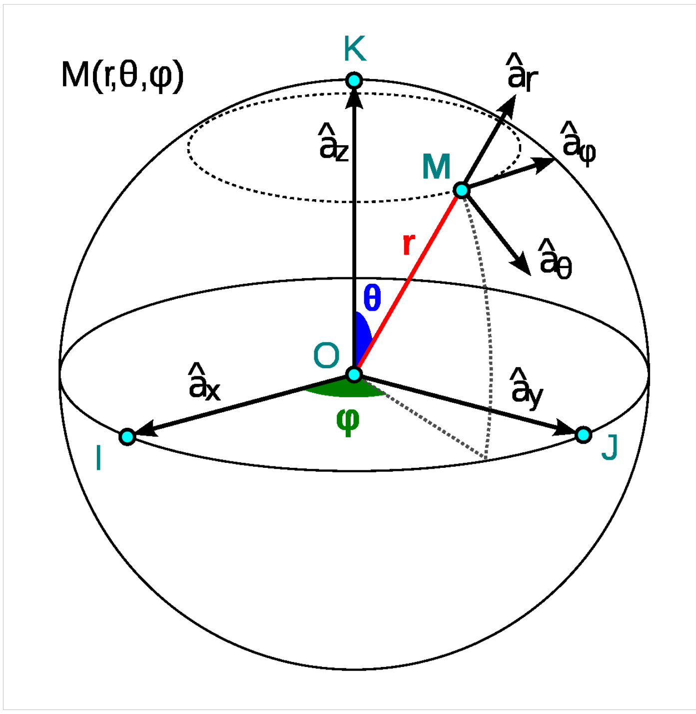
En tal caso, la intersección es también una circunferencia. Cuando una de las desigualdades anteriores es una igualdad, la intersección será un punto, que equivale a una circunferencia de radio cero.

En general, el radio es:

$$\frac{2}{d}\sqrt{m(m-r)(m-r')(m-d)} \quad \text{con} \quad m = \frac{r+r'+d}{2}$$ el medio perímetro.

Coordenadas sobre la esfera

Para localizar un punto de la superficie esférica, las coordenadas cartesianas no son las más adecuadas, por varias razones: en primer lugar, porque hay tres coordenadas cartesianas, mientras que la superficie esférica es un espacio bidimensional. En segundo lugar, tratándose de una esfera, el ángulo es un concepto más adecuado que las coordenadas ortogonales.



Los dos orígenes angulares de las coordenadas esféricas

Se elige un ecuador y un punto del mismo como origen de los ángulos horizontales; se escoge una orientación del ecuador para definir el signo del ángulo φ; se escoge uno de los dos puntos de la esfera más distantes del ecuador –llamados **polos**– para definir el signo del ángulo θ.

Determinación de los puntos mediante ángulos

Todo punto de la esfera está localizado de manera inequívoca por los dos ángulos θ y φ. Con el valor de un ángulo sobre el plano horizontal (plano del ecuador) y otro vertical (desde un polo), se puede localizar cualquier punto de la esfera.

En geometría, normalmente, se expresan estos ángulos en radianes (pues permite calcular longitudes de arcos de circunferencia), mientras que en geografía se usan los grados sexagesimales o centesimales: en este caso, θ es la latitud del punto y φ su longitud si se toma un origen en el punto del ecuador del meridiano de Greenwich y el otro origen en el polo norte. Las latitudes positivas corresponden al hemisferio norte, y las longitudes positivas al hemisferio Este.

Introducir un tercer parámetro *r* permite localizar cualquier punto del espacio con las coordenadas esféricas (r, φ, θ). Si se impone tomar φ en un intervalo semi-abierto de longitud 2π y θ en uno de longitud π, entonces, cualquier punto del espacio tiene coordenadas esféricas únicas, salvo los del eje vertical, donde sirve cualquier valor de φ.

Las coordenadas cartesianas (x, y, z) en el sistema de coordenadas esféricas (r, φ, θ) serán:

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\ \cos\phi \\ y &= r\sin\theta\ \sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{cases} \qquad \text{con} \ -\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad \text{y} \quad 0 < \phi \le \pi$$

Recíprocamente, a partir de las coordenadas cartesianas, se obtienen las coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0 \\ \theta = \ \arccos\frac{z}{r} = \ \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \ \arcsin\frac{y}{r\cos\theta} = 2\ \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \end{cases}$$

Generalizaciones de la esfera

Esferas en dimensiones superiores

Se puede generalizar la noción de esfera en espacios vectoriales de dimensiones superiores a tres. A partir de la cuarta dimensión ya no es representable gráficamente, pero la definición sigue siendo que la esfera es el conjunto de los puntos equidistantes de un punto fijo. En un espacio euclídeo de cuatro dimensiones, usando un sistema de coordenadas cartesianas la ecuación de la esfera de radio 1 centrada en el origen es:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

donde **t** es la cuarta coordenada. Análogamente en un espacio euclídeo de *n* dimensiones:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

Y para una esfera de radio *r*, y centro (c_1, c_2, ..., c_n):

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 + \cdots + (x_n - c_n)^2 = r^2$$

El volumen de la esfera contenida en la superficie anterior, en dimensión *n* se calcula por inducción sobre *n*. Aquí están los diez primeros valores de $V_n(r)$ y las superficies correspondientes:

Dimensión	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Volumen	$2r$	πr^2	$\frac{4\pi r^3}{3}$	$\frac{\pi^2 r^4}{2}$	$\frac{8\pi^2 r^5}{15}$	$\frac{\pi^3 r^6}{6}$	$\frac{16\pi^3 r^7}{105}$	$\frac{\pi^4 r^8}{24}$	$\frac{32\pi^4 r^9}{945}$	$\frac{\pi^5 r^{10}}{120}$
Superficie	2	$2\pi r$	$4\pi r^2$	$2\pi^2 r^3$	$\frac{8\pi^2 r^4}{3}$	$\pi^3 r^5$	$\frac{16\pi^3 r^6}{15}$	$\frac{\pi^4 r^7}{3}$	$\frac{32\pi^4 r^8}{105}$	$\frac{\pi^5 r^9}{12}$

El volumen de la bola alcanza su máximo en dimensión 5, mientras que la superficie de la esfera lo alcanza en dimensión 7.

Existe la posibilidad de representar una *n*-esfera o hiperesfera de *n* dimensiones como fibrado de otra hiperesfera de dimensión inferior. Esto sólo sucede en tres casos:

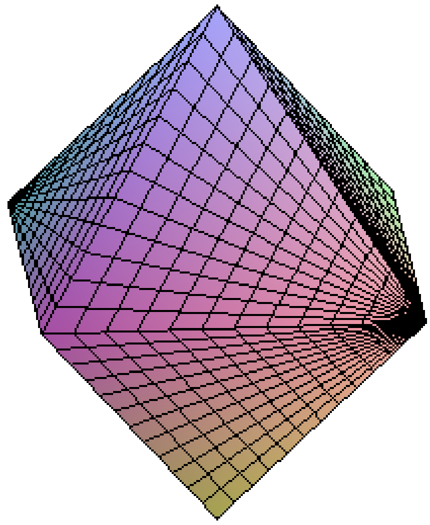
- S^3, puede ser representada como fibrado no trivial con espacio base S^2 y fibra S^1, esta construcción puede obtenerse a partir de una construcción geométrico-algebraica utilizando números complejos.
- S^7, puede ser representada como fibrado no trivial con espacio base S^4 y fibra S^3, esta construcción puede obtenerse a partir de una construcción geométrico-algebraica utilizando números cuaterniónicos.
- S^{15}, puede ser representada como fibrado no trivial con espacio base S^8 y fibra S^7, esta construcción puede obtenerse a partir de una construcción geométrico-algebraica utilizando números octoniónicos.

Para dimensión superior no existen otros casos en que esto sea posible.[1]

Esferas en otras métricas

La noción de esfera se generaliza a cualquier espacio métrico (E,d) así: la esfera de centro *a* y de radio *r* es el conjunto $S(a,r)=\{x\in E, d(a,x)=r\}$, y la bola correspondiente es $B(a,r)=\{x\in E, d(a,x)\leq r\}$.

Para no ser demasiado general, restrinjámonos al espacio real tridimensional, con distancias provenientes de distintas normas, y consideramos las esferas unitarias.

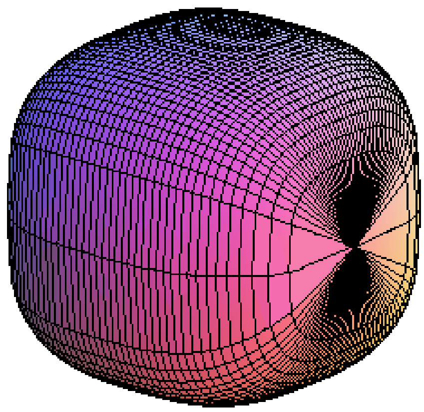


Para un vector **u**(x, y, z) cualquiera, se definen las normas siguientes:

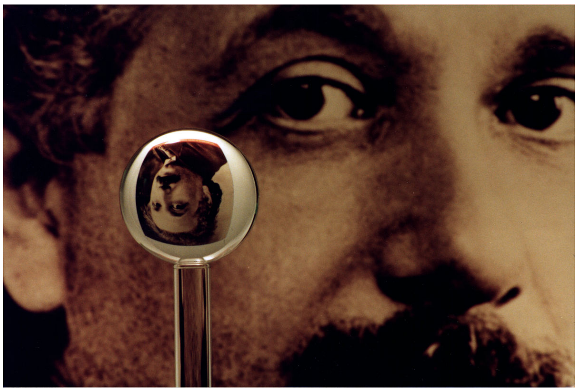
- $\|\mathbf{u}\|_1 = |x| + |y| + |z|$. S(O,1) es un octaedro regular (figura a la derecha).
- $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Se trata de la norma euclidiana, luego S(O,1) es la esfera usual.
- $\|\mathbf{u}\|_3 = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3 + |z|^3}$. S(0,1) es una especie de forma intermedia entre la esfera usual y el cubo (figura a la izquierda).
- $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max(|x|,|y|,|z|)$. S(0,1) es un cubo.

Esferas en topología

Cabe tener presente que el concepto geométrico y el concepto topológico de "n-esfera" no coinciden. En geometría, la superficie de la esfera es llamada 3-esfera, mientras que los topólogos se refieren a ella como 2-esfera y la indican como S^2.[2]



Esferas en física



Una de las esferas más perfectas creadas, refractando la imagen de Albert Einstein. Se aproxima a la esfera ideal con un error menor que el tamaño de cuarenta átomos alineados.

La esfera es la figura geométrica que para igual volumen presenta la superficie externa menor. Esta propiedad es la causa de su omnipresencia en el mundo físico: en una gota de un líquido inmerso en un ambiente gaseoso, o entre líquidos no solubles de diferente densidad, existen fuerzas superficiales que deformarán la gota hasta encontrar el valor mínimo de tensión en todos los puntos de la misma, y este corresponde a una esfera, en ausencia de toda perturbación exterior.

Véase también

- Anexo:Ecuaciones de figuras geométricas
- Ángulo sólido
- Casquete esférico
- Coordenadas esféricas
- Empaquetamiento de esferas
- Esfera cornuda de Alexander
- Esfera homológica
- Número de osculación (problema)
- Paradoja de Banach-Tarski
- Pseudoesfera

Referencias

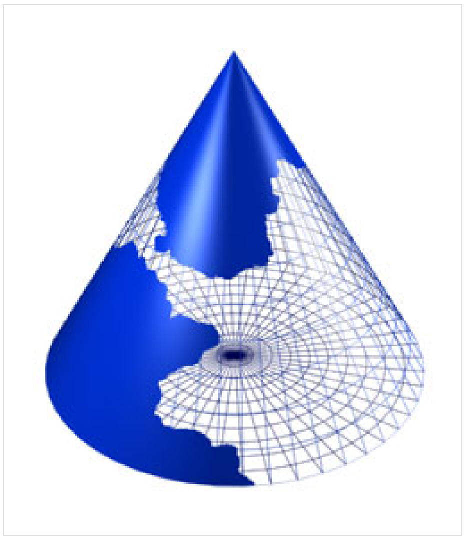
[1] R. Penrose: *El camino de la realidad*, Ed. Debate, Barcelona, 2006, p. 464, ISBN 84-8306-681-5.
[2] Weisstein, Eric W., « Esfera (http://mathworld.wolfram.com/Sphere.html)» (en inglés), *MathWorld*, Wolfram Research, .

Bibliografía

- Roger Penrose (2005): *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe.*
- William Dunham. "Pages 28, 226", *The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey Through the Great Proofs, Problems and Personalities*, ISBN 0-471-17661-3.

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Esfera**. Commons

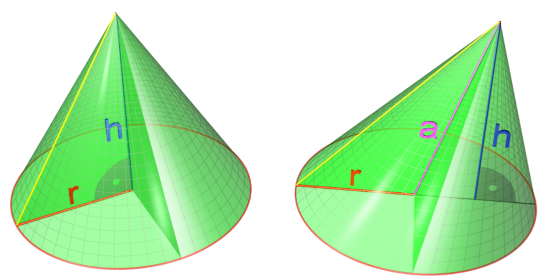
Cono (geometría)



En geometría, un **cono** recto es un sólido de revolución generado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Al círculo conformado por el otro cateto se denomina **base** y al punto donde confluyen las generatrices se llama **vértice**.

Superficie cónica se denomina a toda superficie reglada conformada por el conjunto de rectas que teniendo un punto común (el vértice), intersecan a una circunferencia no coplanaria.

Clasificación



Cono recto y cono oblicuo.

Se denominan:

- **Cono recto**, si el vértice equidista de la base circular
- **Cono oblicuo**, si el vértice no equidista de su base
- **Cono elíptico**, si la base es una elipse. Pueden ser rectos u oblicuos.

La **generatriz** de un cono es cada uno de los segmentos cuyos extremos son el vértice y un punto de la circunferencia de la base.

La **altura** de un cono es la distancia del vértice al plano de la base. En los conos rectos será la distancia del vértice al centro de la circunferencia de la base.

Área de la superficie cónica

El área A de la superficie del cono recto es:

$$A = A_{Base} + A_{Lateral} = \pi r^2 + \pi r g$$

donde **r** es el radio de la base y **g** la longitud de la generatriz del cono recto.

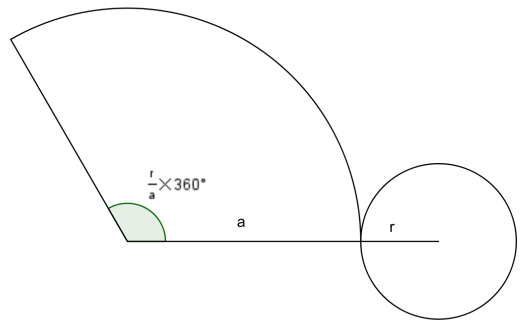
La generatriz de un cono recto equivale a la hipotenusa del triángulo rectángulo que conforma con la altura del cono y el radio de la base;

su longitud es: $g = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Desarrollo plano de un cono recto

El desarrollo plano de un cono recto es un sector circular y un círculo.

El sector circular está delimitado por dos generatrices, siendo la medida del lado curvo igual a la longitud de la circunferencia de la base.



Desarrollo plano del cono.

La forma de calcular la distancia ***a*** en el desarrollo es con la ecuación de $a = \sqrt{h^2 + r^2}$ donde ***r*** es el radio de la base y ***h*** es la altura del cono.

El ángulo que esta sombreado en la figura se calcula con la siguiente fórmula:

$$\text{ángulo} = 360(r/a).$$

Volumen de un cono

El volumen V de un cono de radio r y altura h es 1/3 del volumen del cilindro que posee las mismas dimensiones:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

La ecuación se obtiene mediante $\int_0^h A(x)dx$,

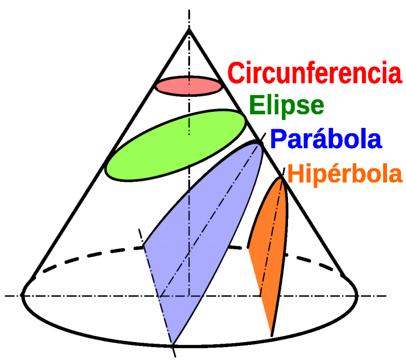
donde $A(x)$ es el área de la sección perpendicular a la altura, con relación a la altura h, en este caso $A(x) = \pi \left(\frac{rx}{h}\right)^2$.

Secciones cónicas

Al cortar con un plano a una superficie cónica, se obtiene distintas figuras geométricas: las secciones cónicas. Dependiendo del ángulo de inclinación y la posición relativa, pueden ser: circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas.

Si el plano pasa por el vértice la intersección podrá ser: una recta, un par de rectas cruzadas o un punto (el vértice).

Las curvas cónicas son importantes en astronomía: dos cuerpos masivos que interactúan según la ley universal de la gravitación, describen órbitas similares a secciones cónicas: elipses, hipérbolas o parábolas en función de sus distancias, velocidades y masas.

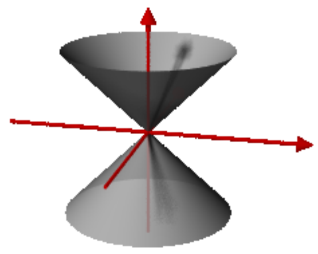


Distintas secciones cónicas.

También son muy útiles en aerodinámica y otras aplicaciones industriales, ya que permiten ser reproducidas por medios simples con gran exactitud, logrando volúmenes, superficies y curvas de gran precisión.

Ecuación en coordenadas cartesianas

En Geometría analítica y Geometría diferencial, el **cono** es el conjunto de puntos del espacio que verifican, respecto un sistema de coordenadas cartesianas, una ecuación del tipo:



Superficie cónica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Este conjunto también coincide con la imagen de la función:

$$X(\theta, t) = (a \cdot t \cdot \cos(\theta), b \cdot t \cdot \sin(\theta), c \cdot t),$$

que es llamada *parametrización* del cono.

Por ejemplo, en el caso que a = b (no nulos), éste conjunto es obtenido a partir de rotar la recta $(t, 0, \frac{ct}{a})$ respecto al eje z, y por eso es llamada parametrización de revolución.
El cono no es una superficie regular, pues posee una singularidad: su vértice; quitándolo se convierte en una superficie regular disconexa y abierta. Entre sus características, podemos destacar que es una *superficie reglada* (es decir que se puede generar por el movimiento de una recta), y es desarrollable, es decir, que se puede *desplegar* sobre un plano; técnicamente esto se expresa diciendo que su curvatura gaussiana es nula (como en el plano o el cilindro)

Véase también

- Tronco
- Tronco de cono
- Sección cónica
- Esferas de Dandelin
- Anexo: Ecuaciones de figuras geométricas
- Cuadricas

Enlaces externos

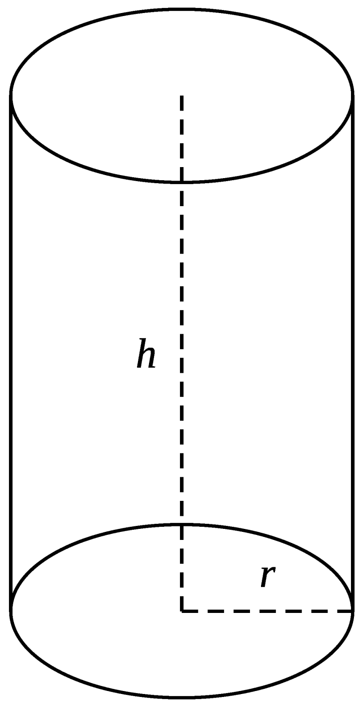
- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **conos**. Commons
- Weisstein, Eric W., «Cono [1]» (en inglés), *MathWorld*, Wolfram Research.
- Weisstein, Eric W., «Generalized Cone [2]» (en inglés), *MathWorld*, Wolfram Research.
- http://math2.org/math/algebra/es-conics.htm

Referencias

[1] http://mathworld.wolfram.com/Cone.html
[2] http://mathworld.wolfram.com/GeneralizedCone.html

Cilindro

Un **cilindro**, en geometría, es la superficie formada por los puntos situados a una distancia fija de una línea recta dada, el **eje** del cilindro. Como superficie de revolución, se obtiene mediante el giro de una recta alrededor de otra fija llamada eje de revolución.



Un cilindro circular recto.

El sólido encerrado por esta superficie y por dos planos perpendiculares al eje también se llamado cilindro.

En geometría diferencial, un cilindro se define de forma general como cualquier superficie reglada generada por una familia uniparametrica de líneas paralelas.

Clasificación

Un cilindro puede ser:

- cilindro rectangular: si el eje del cilindro es perpendicular a las bases;
- cilindro oblicuo: si el eje no es perpendicular a las bases;
- cilindro de revolución: si está limitado por una superficie.

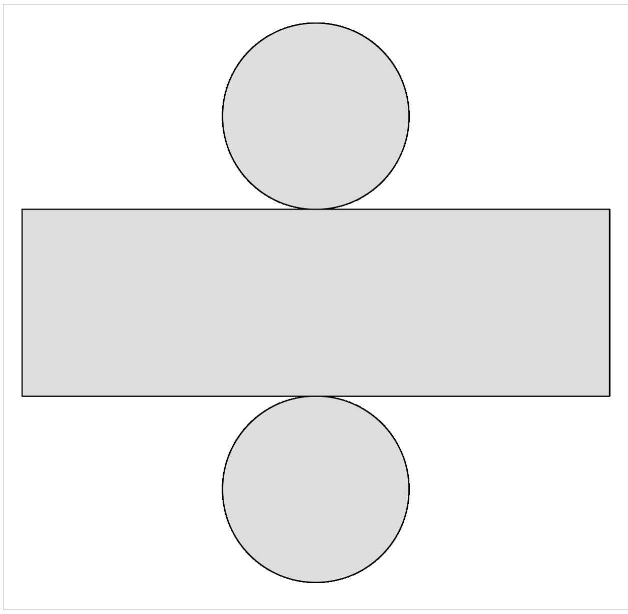
Superficie cilíndrica

La superficie cilíndrica está conformada por rectas paralelas, denominadas generatrices, las cuales contienen los puntos de una curva plana, denominada directriz del cilindro. Como superficie de revolución, la superficie lateral cilíndrica se obtiene mediante el giro de una recta alrededor de un eje. La superficie del cilindro es una superficie reglada; pertenece a las denominadas superficies cuádricas.

Las superficies cilíndricas pueden ser

- superficie cilíndrica de revolución: si todas las generatrices equidistan de un eje, paralelo a ella,
- superficie cilíndrica de no revolución: si no existe un eje que equidiste de las generatrices.

Desarrollo de la superficie cilíndrica



La superficie de un cuadrado redondo recto de base circular está conformada por un rectángulo de altura h y base $b = 2\pi r$, siendo dicha superficie: $A_l = 2\pi r h$ y a su vez es igual a la altura + base / 2 * 2 - altura - base

Además dispone de dos bases circulares, de área $A_b = \pi r^2$

Área de la superficie cilíndrica semicónica

El área de la superficie de un cilindro es: la suma de la superficie lateral A_l más la superficie de las dos bases $2A_b$
En un cilindro recto de base circular, es:

$$A = 2\pi r(h + r)$$

Volumen del cilindro

El volumen de un cilindro es el producto del área de la base A_b por la altura del cilindro h .

El volumen de un cilindro de base circular, es:

$$V = \pi r^2 h$$

siendo la altura del cilindro la distancia entre las bases.

Cilindro: superficie cónica

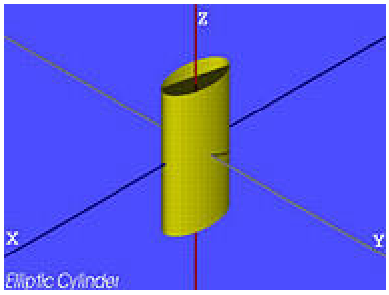
Las secciones cónicas son de tres tipos: elipses, parábolas e hipérbolas, que sirviendo de directrices, originan tres tipos de superficies cilíndricas:

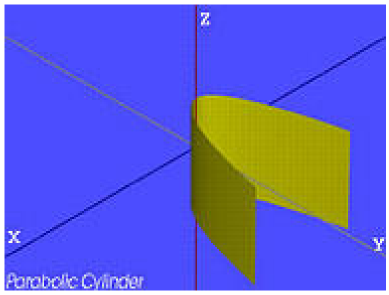
Cilindro elíptico

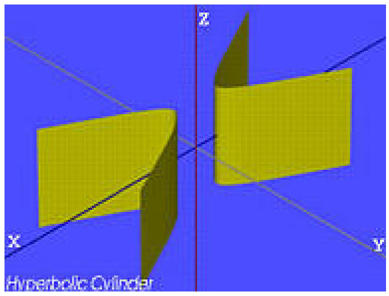
Tomando como directriz una elipse, se puede generar una superficie cilíndrica elíptica (que incluye a los *cilindros circulares*, cuando los semiejes de la elipse son iguales).

En un sistema ortogonal de coordenadas, tomando como eje **z** una recta cuya dirección es paralela a la generatriz, si se escoge como origen el centro de simetría, la ecuación de la superficie cilíndrica es similar a la de la superficie cónica correspondiente.

La ecuación de un cilindro elíptico es de la forma:







$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a y b son los semiejes.

Cilindro parabólico

En similares condiciones, la ecuación de una superficie parabólica será de la forma:

$$x^2 + 2ay = 0$$

Cilindro hiperbólico

En similares condiciones, la ecuación de un superficie hiperbólica es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Véase también

- Círculo
- Triángulo
- Cuadrado
- Alesadora

Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Cilindro**Commons
- Cilindro, en enciclopedia.us.es [1]
- Representación de curvas y superficies, frrg.utn.edu.ar [2]

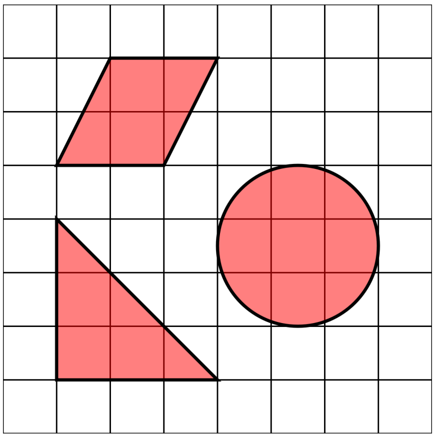
Referencias

[1] http://enciclopedia.us.es/index.php/Cilindro
[2] http://www.frrg.utn.edu.ar/frrg/Apuntes/Analisis/cursup.htm

Figuras geométricas

Figura geométrica

Una **figura geométrica** es un conjunto cuyos elementos son puntos.[1] La Geometría es el estudio matemático detallado de las figuras geométricas y sus características: forma, extensión, posición relativa, propiedades.

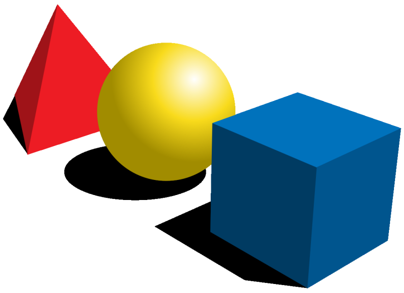


Figuras geométricas que delimitan superficies planas.

Historia y utilidad

La observación de la naturaleza nos muestra la existencia de variadas formas en los cuerpos materiales que la componen y nos proporciona la idea de volumen, superficie, línea, y punto. Por necesidades prácticas, el desarrollo de técnicas usadas para medir, construir o desplazarse, llevaron al hombre a hacer uso de las diversas propiedades de las figuras geométricas.

Una vez adquiridas estas nociones y prescindiendo de su origen práctico, la Geometría (medición de la tierra), de ser un conjunto de técnicas, pasó a constituir una disciplina matemática formal, donde la figura geométrica es un ente abstracto y sus propiedades el objeto de estudio de la Geometría.



Cuerpos geométricos, o figuras geométricas «sólidas» que delimitan volúmenes.

Su aplicación práctica se estudia en física aplicada, astronomía, arquitectura, náutica, topografía, agrimensura, etc.

Las figuras geométricas más elementales

Las figuras geométricas más elementales son el punto, la recta y el plano. Mediante transformaciones y desplazamientos de sus componentes generan diversas líneas, superficies y volúmenes, que son objeto de estudio en matemáticas: geometría, topología, etc.

Adimensional (sin dimensiones)

- Punto

Unidimensional (lineales)

- Recta
  - semirrecta
  - segmento
- Curva

Bidimensional (superficiales)

- Plano

Delimitan superficies (figuras geométricas en sentido estricto):

- Polígono
  - triángulo
  - cuadrilátero
- Sección cónica
  - elipse
    - circunferencia
  - parábola
  - hipérbola

Describen superficies:

- Superficie de revolución
- Superficie reglada

Tridimensional (volumétricas)

Delimitan volúmenes (cuerpos geométricos):

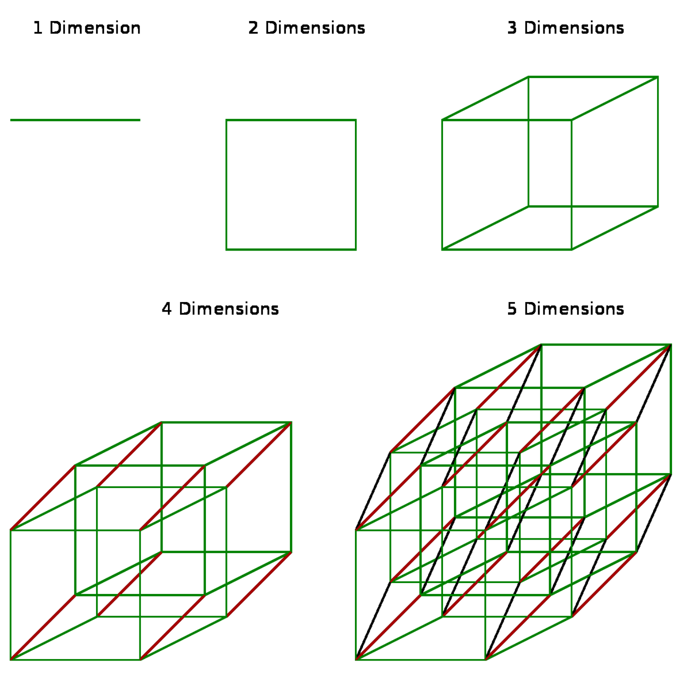
- Poliedro

Describen volúmenes:

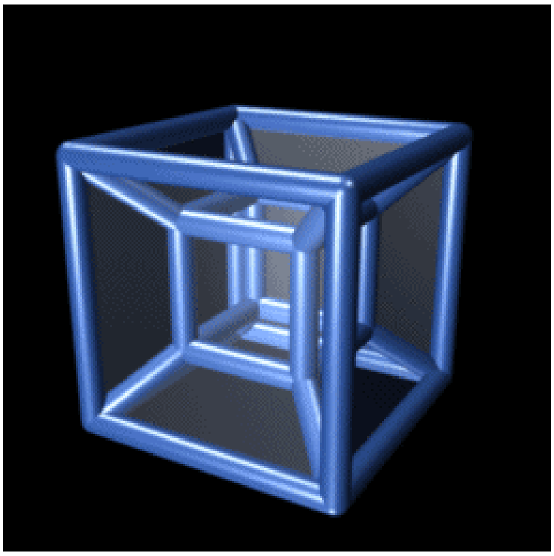
- Sólido de revolución
  - cilindro
  - cono
  - esfera

N-dimensional (n dimensiones)

- Politopo



Un segmento (1 dimensión) puede generar un polígono (2 dimensiones). Mediante nuevas transformaciones podemos obtener un poliedro (3 dimensiones), un polícoro (4 dimensiones) o diversos politopos (n dimensiones).



Proyección de un hipercubo, con una transformación similar a la que se puede aplicar a un cubo de tres dimensiones.

Véase también

- Anexo:Ecuaciones de figuras geométricas
- Geometría
- Lugar geométrico

Notas

[1] Claudia Marcela Polanía Sagra, *Un acercamiento al pensamiento geométrico*. p. 12. (http://books.google.es/books?id=SEifJwC).

Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Figura geométrica**Commons
- Figuras geométricas, en profesorenlinea.cl (http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Figuras_geometricas.htm)

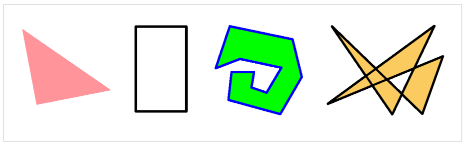
Polígono

Un **polígono** es una figura geométrica cerrada, formada por segmentos rectos consecutivos y no alineados, llamados lados.

Los polígonos cuyos lados no están en el mismo plano, se denominan polígonos alabeados.

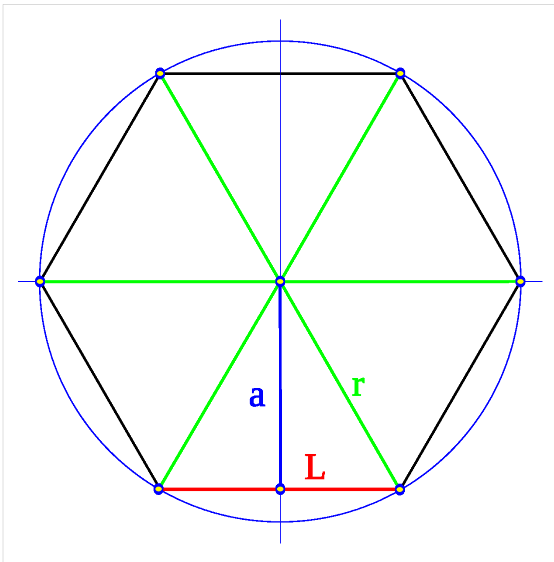
Existe la posibilidad de configurar polígonos en más de dos dimensiones. Un polígono en tres dimensiones se denomina poliedro, en cuatro dimensiones se llama polícoro, y en *n* dimensiones se denomina politopo.

Etimología



La palabra *polígono* procede del griego antiguo πολύγωνον (polýgonon), de πολύ (polí)"muchos" y γωνία (goná) "ángulo".

Elementos de un polígono



En un polígono podemos distinguir:

- Lado, **L**: es cada uno de los segmentos que conforman el polígono.
- Vértice, **V**: el punto de unión de dos lados consecutivos.
- Diagonal, **D**: segmento que une dos vértices no contiguos.
- Perímetro, **P**: es la suma de todos sus lados.
- Ángulo interior, **AI**: es el formado por los lados consecutivos; este se determina restando de 180 grados sexagesimales el ángulo central.
- Este se determina dividiendo 360º por el número de lados del polígono.
- Ángulo central y Ángulo exterior, **AC** y **AE**: es el formado por los segmentos de rectas que parten del centro a los extremos de un lado; este se determina dividiendo 360º por el número de lados del polígono, y el ángulo externo es el formado por un lado y la prolongación de un lado consecutivo o podemos aplicar 180º - ángulo interno.

En un polígono regular podemos distinguir, además:

- Centro, **C**: el punto equidistante de todos los vértices y lados.
- Apotema, **a**: segmento que une el centro del polígono con el centro de un lado; es perpendicular a dicho lado.
- Diagonales totales, $N_d = \frac{n(n-3)}{2}$, donde n es el número de lados del polígono.

Clasificación

Clasificación de polígonos según el número de lados	
Nombre	**nº lados**
trígono, triángulo	3
tetrágono, cuadrángulo, cuadrilátero	4
pentágono	5
hexágono	6
heptágono	7
octágono	8
eneágono	9
decágono	10
endecágono	11
dodecágono	12
tridecágono	13
tetradecágono	14
pentadecágono	15
hexadecágono	16
heptadecágono	17
octodecágono	18
eneadecágono	19
isodecágono, icoságono	20
triacontágono	30
tetracontágono	40
pentacontágono	50
hexacontágono	60
heptacontágono	70
octacontágono	80
eneacontágono	90
hectágono	100
chiliágono	1.000
miriágono	10.000
decemiriágono	100.000
hecatomiriágono, megágono	1.000.000

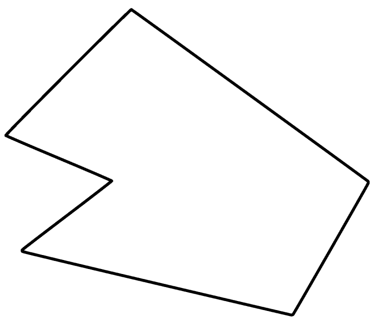
Los tipos de polígonos más conocidos son los polígonos regulares, que son planos, simples, convexos, equiláteros, equiángulos y con lados rectilíneos.

Los polígonos se clasifican por el número de sus lados según la tabla adjunta.

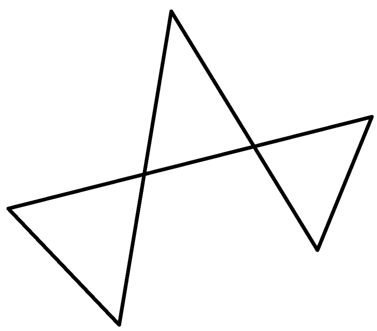
Se clasifican por la forma de su contorno

Un polígono, por la forma de su contorno, se denomina

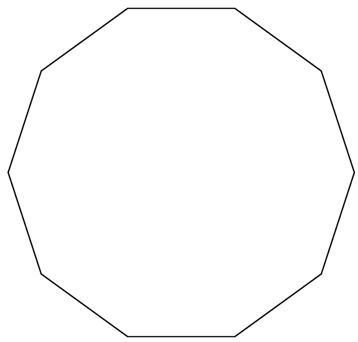
- **Simple**, si dos de sus aristas no consecutivas no se intersecan (cortan),
- **Complejo**, si dos de sus aristas no consecutivas se intersecan;
- **Convexo**, si al atravesarlo una recta lo corta en un máximo de dos puntos,
- **Cóncavo**, si al atravesarlo una recta puede cortarlo en más de dos puntos;
- **Regular**, si tiene sus ángulos y sus lados iguales,
- **Irregular**, si tiene sus ángulos y lados desiguales;
- **Equilátero**, el que tiene todos sus lados iguales,
- **Equiángulo**, el que tiene todos sus ángulos iguales.



polígono simple, cóncavo, irregular.



polígono complejo, cóncavo, irregular.



polígono convexo, regular (equilátero y equiángulo).

Los polígonos ortogonales o isotéticos, son aquellos que poseen los mismos elementos que conforman los polígonos simples: un conjunto de vértices y aristas, pero con la singular característica de que sus aristas son paralelas a cualquiera de los ejes cartesianos X e Y.

Poligonal

Se denomina línea poligonal al conjunto ordenado de segmentos tales que, el extremo de uno de ellos coincide con el origen del segmento que le sigue. Un polígono está conformado por una línea poligonal cerrada.

Véase también

- Mediana (geometría)
- Mediatriz
- Paralelogramo
- Regla y compás
- Anexo:Ecuaciones de figuras geométricas
- Triángulo

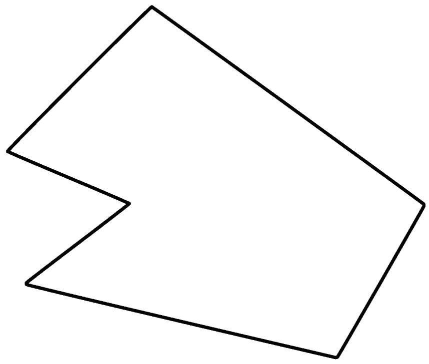
Referencias

Enlaces externos

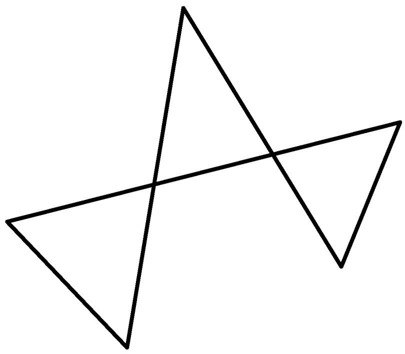
- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Polígono**. Commons
- Weisstein, Eric W., « Polígono (http://mathworld.wolfram.com/Polygon.html)» (en inglés), *MathWorld*, Wolfram Research.
- Polígono, en webdelprofesor.ula.ve (http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/alperez/teoria/cap_01a-conceptos_geometricos/04-poligono.htm)
- Polígonos (http://www.youtube.com/watch?v=V8b1Ow6QH-A) en YouTube

Polígono simple

Un **polígono simple** es un polígono cuyos lados no adyacentes no se intersecan. Un polígono simple divide al plano geométrico que lo contiene en dos regiones: la región interior al polígono y la región exterior a él. Un polígono que no es simple se denomina **polígono complejo**.



Un polígono simple hexagonal.



Un polígono complejo pentagonal.

$$Poligono\begin{cases} simple\begin{cases} convexo\begin{cases} regular \\ irregular \end{cases} \\ cóncavo \end{cases} \\ complejo \end{cases}$$

Polígonos simples en geometría computacional

En geometría computacional existen varios problemas importantes donde una de las condiciones iniciales dadas es un polígono simple:

- Determinar si un punto yace en el interior de un polígono simple;
- Determinar el área contenida en un polígono simple;
- Triangulación de polígonos: dividir un polígono simple en triángulos;
- Unión de polígonos: hallar el polígono simple que contenga el área contenida en cualesquiera de otros dos polígonos simples;
- Intersección de polígonos: hallar el polígono o polígonos simples que contengan el área común a un par de polígonos simples;
- Determinar la envoltura convexa de un polígono simple.

Suma de los ángulos interiores

La suma de todos los ángulos interiores de un polígono simple de n lados es: $180^{\circ} * (n-2)$.

División

Los polígonos simples, pueden ser convexos o cóncavos.

Polígono convexo

Polígono convexo es aquel que tiene todos sus ángulos menores de 180º.[1]

Polígono cóncavo

Polígono cóncavo es aquel que tiene algún ángulo que mide más de 180º.[2]

Referencias

[1] Diccionario de Materias: Polígono convexo (http://www.kalipedia.com/glosario/poligono-concavo.html?x=2872)
[2] Diccionario de Materias: Polígono cóncavo (http://www.kalipedia.com/glosario/poligono-concavo.html?x=2873)

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. *Simple Polygon* en [[MathWorld (http://mathworld.wolfram.com/SimplePolygon.html)]]

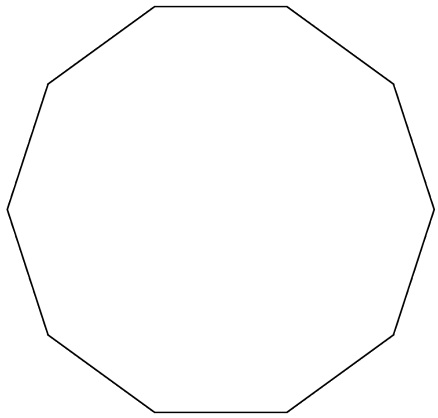
Polígono convexo

Un **polígono convexo** es un polígono en el que todos los ángulos interiores miden menos de 180 grados ó π radianes y todas sus diagonales son interiores.

Cualquier recta que pase por un lado de un polígono convexo deja a todo el polígono completamente en uno de los semiplanos definidos por la recta.

En un polígono convexo, todos los vértices "apuntan" hacia el exterior del polígono.

Todos los triángulos son polígonos convexos. Todos los polígonos regulares son convexos.



Un polígono **convexo** decagonal.

Véase también

- Polígono cóncavo

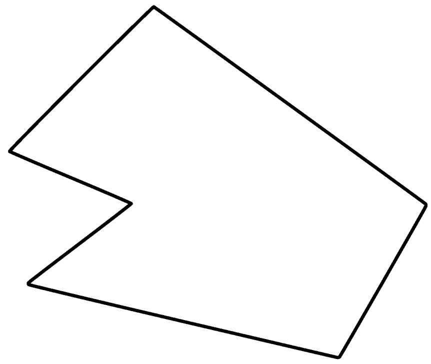
Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. *Convex Polygon* en [[MathWorld [1]].]

Referencias

[1] http://mathworld.wolfram.com/ConvexPolygon.html

Polígono cóncavo



Un polígono **cóncavo** hexagonal. Observe que uno de sus vértices apunta hacia el interior de la figura.

Un Polígono cóncavo es aquel polígono en el que al menos uno de sus ángulos interiores mide más de 180 grados ó π radianes

En un polígono cóncavo al menos una de sus diagonales es exterior al polígono.

Los polígonos estrellados son polígonos cóncavos.

Véase también

- Polígono convexo

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W., «Concave Polygon [1]» (en inglés), *MathWorld*, Wolfram Research.
- Diccionario de Materias: Polígono cóncavo [2]

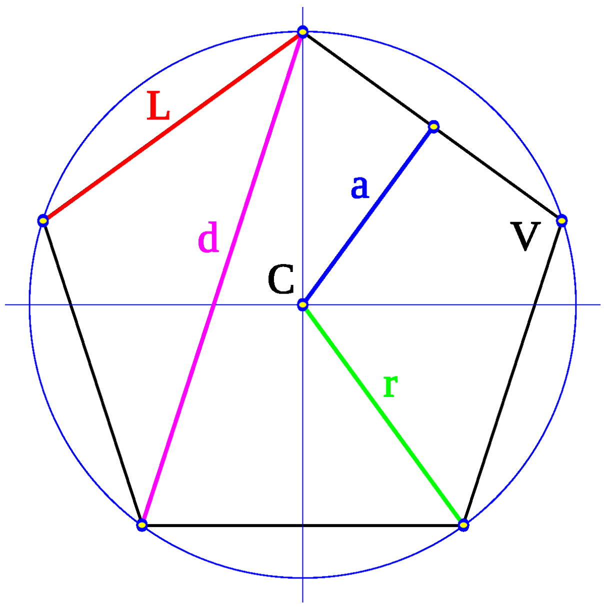
Referencias

[1] http://mathworld.wolfram.com/ConcavePolygon.html
[2] http://www.kalipedia.com/glosario/poligono-concavo.html?x=2873

Polígono regular

Un **polígono regular** es un polígono en el que todos los lados tienen la misma longitud y todos los ángulos interiores son de la misma medida.

Veamos las distintas características de los polígonos regulares, empleando la figura de un Pentágono para representar un polígono regular genérico.



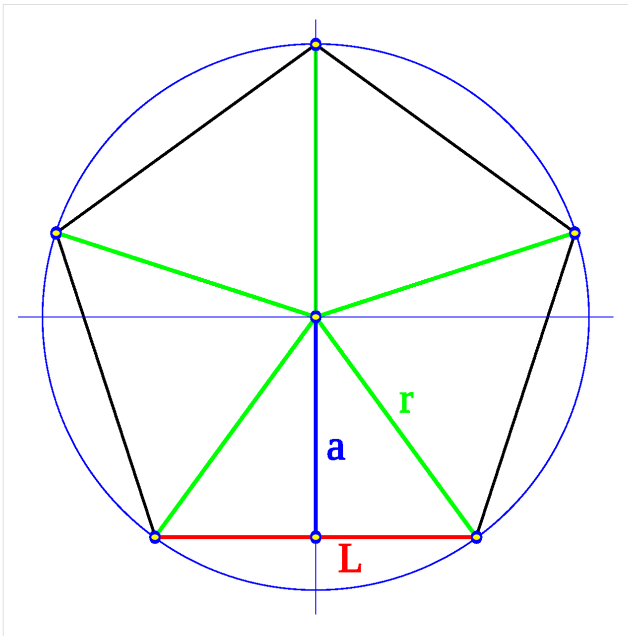
Una característica de los polígonos regulares, es que se pueden trazar inscritos en una circunferencia que tocará cada uno de los vértices del polígono. A medida que crece el número de lados de un polígono regular, su apariencia se asemeja cada vez más a la de una circunferencia.

En un polígono regular podemos distinguir:

- Lado, **L**: es cada uno de los segmentos que forman el polígono.
- Vértice, **V**: el punto de unión de dos lados consecutivos.
- Centro, **C**: el punto central equidistante de todos los vértices.
- Radio, **r**: el segmento que une el centro del polígono con uno de sus vértices.

- Apotema, **a**: segmento perpendicular a un lado, hasta el centro del polígono.
- Diagonal, **d**: segmento que une dos vértices no contiguos.
- Perímetro, **P**: es la suma de la medida de su contorno.

Propiedades

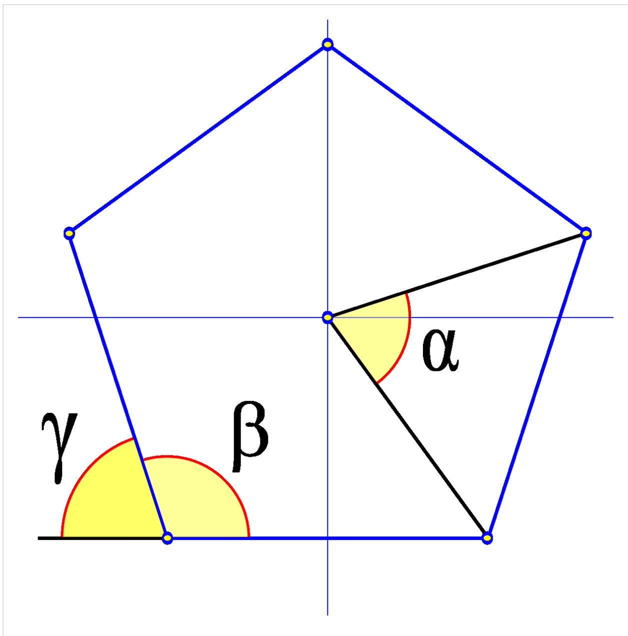


Dadas las características de los polígonos regulares, podemos diferenciar algunas propiedades que se dan siempre, y que son de gran utilidad para determinar sus propiedades, y dimensiones geométricas.

- Los polígonos regulares son **equiláteros**; todos sus lados tienen la misma longitud
- Todos los ángulos interiores de un polígono regular tienen la misma medida, es decir, son congruentes
- El **centro** de un polígono regular es un punto equidistante de todos los vértices del polígono
- Los polígonos se pueden dividir en triángulos cuyos lados son el lado del polígono y los dos segmentos que unen el centro y los vértices (radios)
- El ***apotema*** es el segmento que une el centro y la mitad de cada lado del polígono
- El **radio**' es el segmento que une el centro y cada vértice

Todos los polígonos tienen tres o más lados.

Los ángulos de un polígono regular



Entre los ángulos existentes en un polígono regular, podemos ver: el ángulo central, ángulo interior y ángulo exterior.

Ángulos centrales

- To

|grados sexagesimales]]

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \text{en radianes}$$

Ángulos interiores

- El Ángulo interior, β , de un polígono regular mide:

  $\beta = 180^\circ \cdot \frac{(n-2)}{n}$ en grados sexagesimales

  $\beta = \pi \cdot \frac{(n-2)}{n}$ en radianes

- La suma de los ángulos interiores, $\sum \beta$, de un polígono regular es de:

  $\sum \beta = 180^\circ \cdot (n-2)$ en grados sexagesimales

  $\sum \beta = \pi \cdot (n-2)$ en radianes

Ángulos exteriores

- El Ángulo exterior, γ, de un polígono regular es de:

  $\gamma = \frac{360^\circ}{n}$ en grados sexagesimales

  $\gamma = \frac{2\pi}{n}$ en radianes

- La suma de los ángulos exteriores, $\sum \gamma$, de un polígono regular es:

  $\sum \gamma = 360^\circ$ en grados sexagesimales

  $\sum \gamma = 2\pi$ en radianes

Como puede verse la suma de los ángulos exteriores de un polígono, y de un polígono regular en particular, mide una circunferencia completa, independientemente del número de lados.

A esta conclusión se podía llegar percatándose de que:

$$\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^\circ$$

dado que todos los ángulos interiores de un triángulo suman 180 grados, que resulta:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Por otro lado al ser ángulos suplementarios tenemos:

$$\gamma + \beta = 180^\circ$$

por tanto, en un polígono regular el ángulo central y el exterior miden lo mismo:

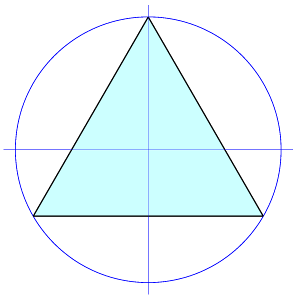
$$\alpha = \gamma$$

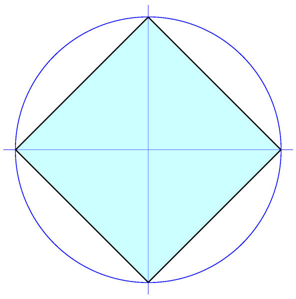
y habiendo el mismo número de ángulos centrales y exteriores en un polígono, su suma también es la misma:

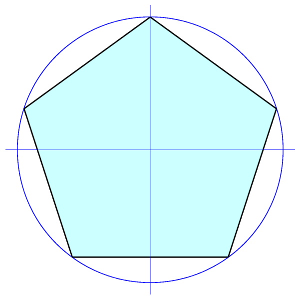
$$\sum \alpha = \sum \gamma = 360^\circ$$

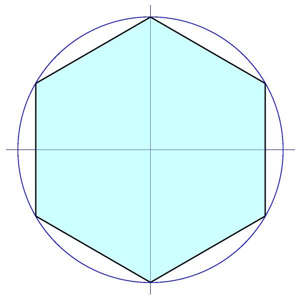
que es una circunferencia completa, independientemente del número de lados, esta conclusión es valida también para los polígonos no regulares.

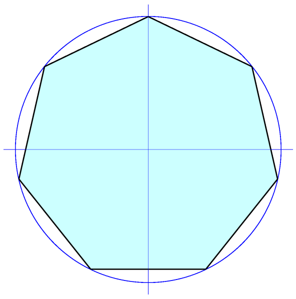
Galería de polígonos regulares

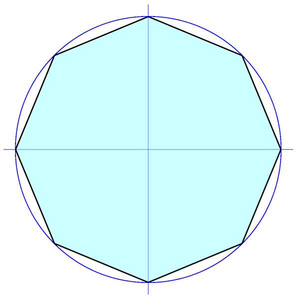

Triángulo equilátero (Triángulo regular).

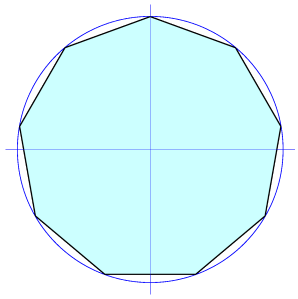

Cuadrado (cuadrilátero regular).

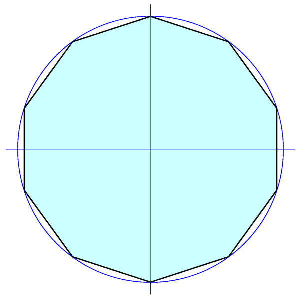

Pentágono regular.

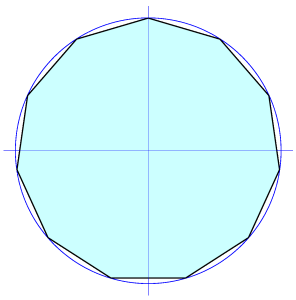

Hexágono regular.

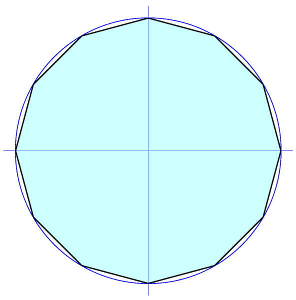

Heptágono regular.

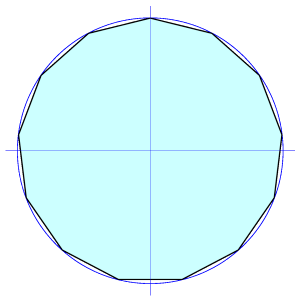

Octágono regular.

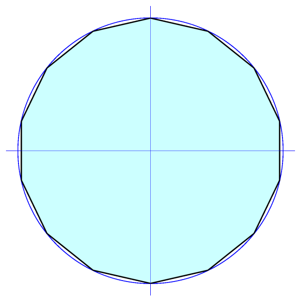

Eneágono regular.


Decágono regular.


Endecágono regular.

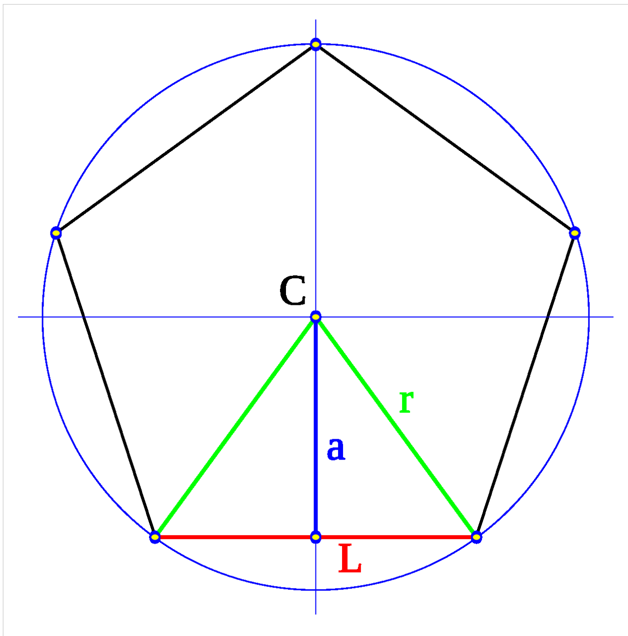

Dodecágono regular.


Tridecágono regular.


Tetradecágono regular.

Área de los polígonos regulares

Para calcular el área, **A**, de un polígono debemos multiplicar el perímetro, **P**, por el apotema, **a**, y dividido entre dos. Lo que se resume con la siguiente formula matematica:



$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

Partiendo del triángulo que tiene por base un lado,**L**, del polígono y altura su apotema,**a** , el área de este triángulo, es:

$$A_t = \frac{L \cdot a}{2}$$

Un polígono de **n** lados, tiene **n** de estos triángulos, por lo tanto el área del polígono será:

$$A_p = \frac{L \cdot a}{2} \cdot n$$

esto es:

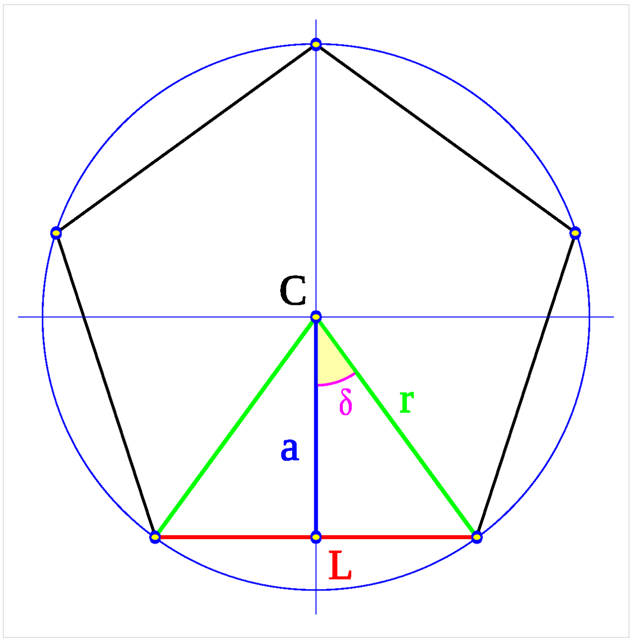
$$A_p = \frac{L \cdot n \cdot a}{2}$$

Sabiendo que la longitud de un lado,**L**, por el número,**n**, de lados es el perímetro,**P** , tenemos:

$$A_p = \frac{P \cdot a}{2}$$

Área de un polígono regular, conociendo el número de lados y la apotema

Sabiendo que:



$$A_p = \frac{L \cdot n \cdot a}{2}$$

Además $\delta = \frac{\pi}{n}$, ya que es la mitad de un ángulo central (esto en radianes).

Observando la imagen, es posible deducir que $L = 2 \cdot a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Sustituyendo el lado:

$$A_p = \frac{\left(2 \cdot a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \cdot n \cdot a}{2}$$

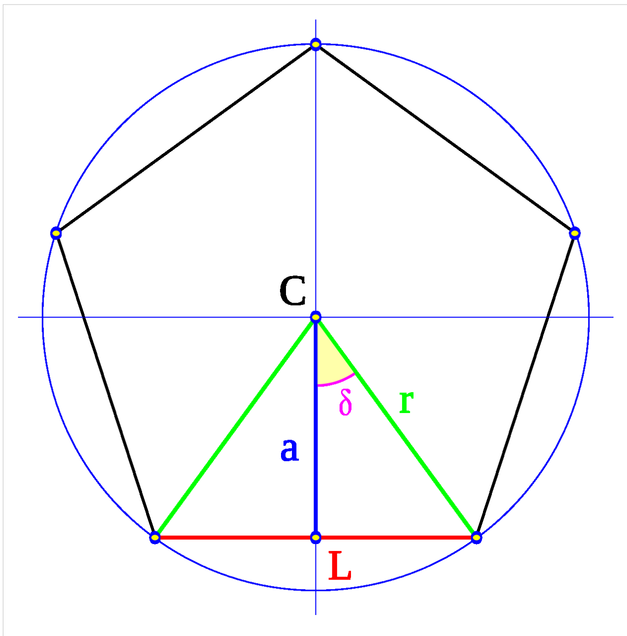
Finalmente:

$$A_p = a^2 \cdot n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Con esta fórmula se puede averiguar el área con el número de lados y la apotema, sin necesidad de recurrir al perímetro.

Área de un polígono, conociendo el número de lados y el radio

Un polígono queda perfectamente definido por su número de lados **n**, y el radio **r**, por tanto podemos determinar cual es su área, a la vista de la figura, tenemos que:



$$L = 2r\sin(\delta)$$
$$a = r\cos(\delta)$$

donde el ángulo central es:

$$\alpha = 2\delta = \frac{2\pi}{n}$$

sabiendo que el área de un polígono es:

$$A_p = \frac{L \cdot n \cdot a}{2}$$

y sustituyendo el valor del lado y la apotema calculados antes, tenemos:

$$A_p = \frac{2r\sin(\delta) \cdot n \cdot r\cos(\delta)}{2}$$

ordenando tenemos:

$$A_p = \frac{nr^2 \cdot 2\sin(\delta)\cos(\delta)}{2}$$

sabiendo que:

$$2\sin(\delta)\cos(\delta) = \sin(2\delta)$$

resulta:

$$A_p = \frac{nr^2\sin(\alpha)}{2}$$

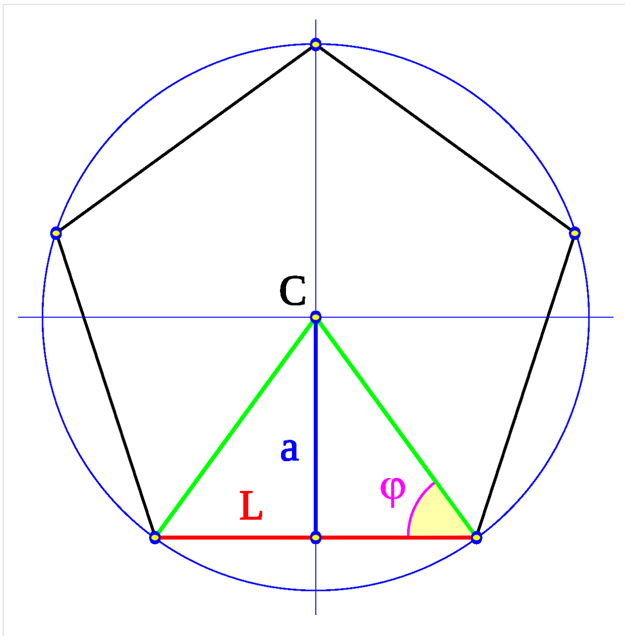
o lo que es lo mismo:

$$A_p = \frac{nr^2\sin(\frac{2\pi}{n})}{2}$$

Con esta expresión podemos calcular el área del polígono, conociendo solamente el número de lados y su radio, lo que resulta útil en muchos casos.

Área de un polígono en función del lado

Y si queremos expresar el área en función del lado, podemos calcularlo de la siguiente manera:



$$A_p = n \cdot \frac{L \cdot a}{2}$$

Sea φ el ángulo formado por el Lado "**L**" y el radio "**r**":

$$\varphi = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi - \frac{2\pi}{n}}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{(n-2)}{n}$$

El valor de la apotema en función del lado será, por la definición de la tangente:

$$\tan\varphi = \frac{a}{\frac{L}{2}} = \frac{2a}{L}$$

Despejando la apotema tenemos:

$$a = \frac{L \cdot \tan\varphi}{2}$$

Sustituimos la apotema por su valor:

$$\left.\begin{array}{l} A_p = n \cdot \dfrac{L \cdot a}{2} \\[2ex] a = \dfrac{L \cdot \tan\varphi}{2} \\[2ex] \varphi = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(n-2)}{n} \end{array}\right\} \longrightarrow \quad A_p = n \cdot \frac{L^2}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{(n-2)}{n}\right)$$

Con lo que conociendo el número de lados del polígono regular y la longitud del lado podemos calcular su superficie.

Diagonales de un polígono regular

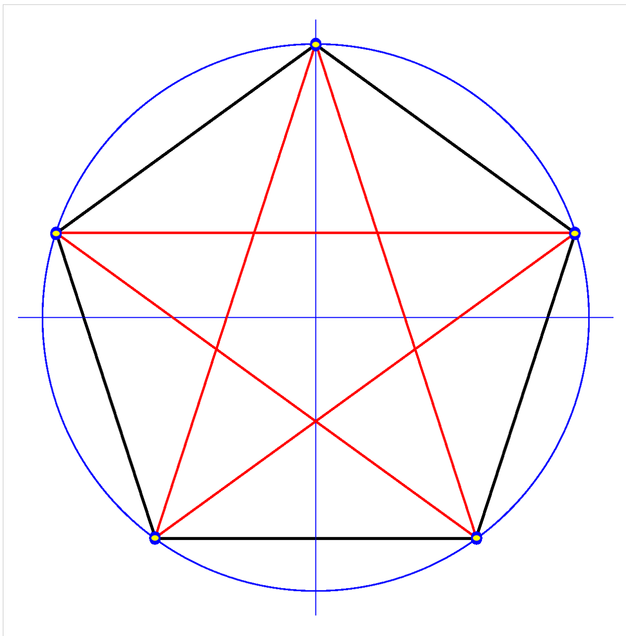
Como ya se ha dicho la diagonal de un polígono es el segmento que une dos vértices no contiguos, vamos a ver algunas características de estas diagonales.

Número de diagonales

Para determinar el número de diagonales **Nd**, de un polígono de **n** vértices realizaremos el siguiente razonamiento:

- De un vértice cualquiera partirán (n − 3) diagonales, donde n es el número de vértices, dado que no hay ningún diagonal que le una consigo mismo ni con ninguno de los dos vértices contiguos.
- Esto es valido para los n vértices del polígono.
- Una diagonal une dos vértices, por lo que aplicando el razonamiento anterior tendríamos el doble de diagonales de las existentes.

Según el razonamiento tendremos que:

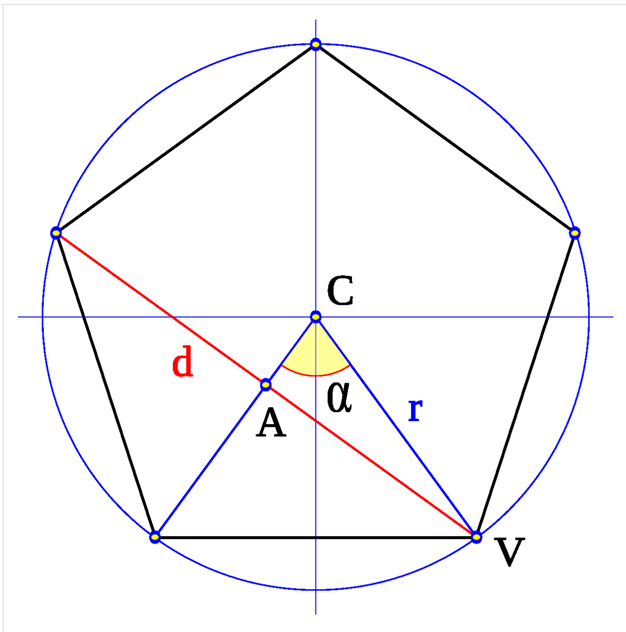


$$N_d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Longitud de la diagonal más pequeña

La diagonal más pequeña de un polígono regular es la que une dos vértices alternos, para determinar su longitud, partimos del ángulos central y del radio, el radio que pasa por el vértice intermedio, corta a la diagonal en el punto **A**, este radio y la diagonal son perpendiculares en **A**.

Esto es el triángulo **VAC** es rectángulo en **A**, por tanto:



$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{d}{2}}{r}$$

que resulta:

$$\sin(\alpha) = \frac{d}{2r}$$

de donde deducimos que:

$$d = 2r\sin(\alpha)$$

Sabiendo el valor del ángulo central:

$$d = 2r\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

La diagonal más pequeña de un polígono regular, solo depende del radio y del número de lados, siendo tanto mayor cuanto mayor sea el radio y disminuyendo de longitud cuando aumenta el número de lados del polígono.

Véase también

- Anexo:Ecuaciones de figuras geométricas
- Polígono
- Estrella (figura geométrica)
- Regla y compás
- Trigonometría

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W., «Polígono regular [1]» (en inglés), *MathWorld*, Wolfram Research.
- Polígonos regulares [2] en dibujotecnico.com
- Polígono regular [3] en mathematicsdictionary.com
- Polígono regular [4] en thales.cica.es
- Los polígonos regulares [5] en w3.cnice.mec.es

Bibliografía

1. Echegaray, José (2001) (en español). *Geometría: ángulos, polígonos y circunferencias* (1 edición). Editorial Bruño. pp. 32. ISBN 978-84-216-4219-1.
2. (en español) *Geometría, polígonos, circunferencia y círculo* (1 edición). Editorial Acueducto, S.L.. 2000. pp. 32. ISBN 978-84-95523-32-7.
3. (en español) *Geometría, polígonos, circunferencia y círculo, Educación Primaria* (1 edición). Editorial Escudo, S.L.. 1997. pp. 32. ISBN 978-84-89833-36-4.

Referencias

[1] http://mathworld.wolfram.com/RegularPolygon.html
[2] http://www.dibujotecnico.com/saladeestudios/teoria/gplana/poligonos/generalidades.asp
[3] http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/r/regularpolygon.htm
[4] http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0263-02/geometria/pentag.html
[5] http://w3.cnice.mec.es/Descartes/1y2_eso/Poligonos_regulares_y_circulos/Policir1.htm

Fuentes y contribuyentes del artículo

Geometría *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48489154 *Contribuyentes*: 1horozco, 213-98-205-182.uc.nombres.ttd.es, 3coma14, AFLastra, Abece, Adrruiz, Aibdescalzo, Airunp, Alfredobi, Alhen, Allforrous, Andreoliva, Angel GN, AntBiel, Antur, Arcibel, Areftipu, Arkimedes, AstroF7, Açipni-Lovrij, Bachi 2805, Baiji, Balderai, Banfield, Bedwyr, Belascoaran mx, Belb, Beramendi, Bethan 182, Beto29, Brindys, Bucephala, Bucho, BuenaGente, Byron olea duran, CASF, Capo Di Corleone, Carmin, Cesarabad, Chabacano, Chespeluche, Chewie, Chriswarrior, ChuckNorrisTrollFace, Cinabrium, Cobalttempest, Cookie, Corrector1, DJ Nietzsche, Dark Bane, David0811, Diegusjaimes, Digigalos, Dodo, Draxtreme, Ecemaml, Edslov, Edsonlaura, Eduardosalg, Edub, El Hoy, Eligna, Elisardojm, Elliniká, Elsenyor, Emiduronte, Equi, Er Komandante, Erfil, Eric, Ernesto Bueno, Ernesto Graf, Farisori, Fedego, Felipe-nico, Filipo, Fonsi80, Forgeby, Foundling, FrancoGG, Frandzi.rangel, GMSraykagesnake, Gafotas, Gaius iulius caesar, Galandil, Geoher95, Gizmo II, Greek, Grizzly Sigma, Guillelink, Gustavocarra, Götz, HUB, Halfdrag, HiTe, Hosg, Humberto, Ialad, Ignacio Icke, Ingenioso Hidalgo, Isha, JMCC1, JMPerez, Jarisleif, Jarke, Javierito92, Jcaraballo, Jkbw, Jomra, Jorge c2010, JorgeGG, Joseaperez, Josell2, Jsanchezes, Jtico, Juan Marquez, Juan saltillo pedrero, Julie, Katze Canciola, Kiekvogel, Kokoo, Lagalag, Larocka, Latiniensis, Lcarp92, Lew XXI, Lobo, MARC912374, Madalberta, Magister Mathematicae, Maldoror, Maleiva, Matdrodes, Maveric149, Maxsienn, McOil, Mecamático, MiguelAngelCaballero, Mindeye, Mister, Moriel, Mortadelo2005, Máximo de Montemar, Netito777, Nicop, Nioger, Nixón, OLM, Orejivangoghero, PACO, Palica, Pedro Lozano Barroso, Petruss, Pgimeno, Pilaf, Platonides, PoLuX124, Prietoquilmes, Queninosta, Rastrojo, Raulshc, Rondador, Rovnet, Rsg, Ruy Pugliesi, Sanbec, Satanás va de retro, Savh, Siabef, Simon perez, Skadia, Srruly, Super braulio, Superzerocool, Taichi, Tano4595, Technopat, TheRandyAlex, Tirithel, Tomatejc, UDCONGO, Ulises Sarry, Unnio, Uruk, Valentin estevanez navarro, Vitamine, Vivero, Vyk2rr, Wewe, Wikisilki, Wilfredor, Youssefsan, Zulucho, conversion script, 766 ediciones anónimas

Geometría euclidiana *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=47886497 *Contribuyentes*: Alejandromenna, Alhen, Anaco2000, Arlekean, Chewie, Cinabrium, Danielba894, Davidmh, Davius, Desde el planeta de los simios, Diegusjaimes, Echani, El loko, Euclides, Ezarate, Farisori, Felipe Canales, Gcatalan, GermanX, Gonzalez.K, Guirrohl, Gusbelluwiki, Gustronico, Isha, JMCC1, JaviMad, JoulSauron, Juan Marquez, Juan Mayordomo, Lourdes Cardenal, MarianoOsso, Matdrodes, Paintman, Paulienator, Platonides, Rosarino, Savh, Super braulio, Tano4595, Tirithel, Tituslenin, Vivero, Wewe, 83 ediciones anónimas

Geometría euclidiana plana *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=45115679 *Contribuyentes*: Alexan, Arrt-932, Cesarabad, Cinabrium, Dat, Diegusjaimes, Eduardosalg, El Hoy, Especiales, Farisori, Foundling, Fsd141, Góngora, Isha, JMCC1, Jsanchezes, Juan Marquez, Juan Mayordomo, Kiut, Larocka, Llull, Mahadeva, Manuelt15, Matdrodes, Pan con queso, Pececito, PoLuX124, Queninosta, Rastrojo, SITOMON, Takashi kurita, Tano4595, Tortillovsky, Yrithinnd, 51 ediciones anónimas

Geometría espacial *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=46141785 *Contribuyentes*: 3coma14, Alhen, Allforrous, AntBiel, Cinabrium, Daniel Grigori, Diegusjaimes, Digigalos, Drake 81, Emiduronte, Er Komandante, Groucho Marx, Hispa, Hxxbin, JMCC1, Jorge c2010, Jsanchezes, Jtico, Juan Mayordomo, Kiekvogel, Lourdes Cardenal, Magister Mathematicae, Matdrodes, Maugemv, Millars, Miss Manzana, Netito777, Resped, SAMTODOPODEROSO, Sanbec, Template namespace initialisation script, Yerandy1990, Yrithinnd, Ángel Luis Alfaro, 45 ediciones anónimas

Geometría no euclidiana *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=47570649 *Contribuyentes*: .José, Alonso de Celada, Altair Lemos, Axxgreazz, Azofeifa82, Camima, Cancerbero sgx, Davidsevilla, Davius, Dibujon, FAR, Gcatalan, GermanX, Gustronico, HAG, JMCC1, Kriztoval, Latiniensis, Mmucino, Nanovapor9, Paintman, Pati, Queninosta, SpeedyGonzalez, Tano4595, Tituslenin, Unf, Xareu bs, 45 ediciones anónimas

Cuerpos geométricos *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48549771 *Contribuyentes*: Banfield, Dferg, Diegusjaimes, Ensada, Foundling, Galandil, Ggenellina, HUB, Humberto, Ialad, Isha, JAQG, Javierito92, Jkbw, Jorge c2010, Laura Fiorucci, Manuelt15, Markoszarrate, PAADLDAD, Petruss, Poco a poco, Raulshc, Soulreaper, Super braulio, Wikichasqui, 104 ediciones anónimas

Cubo *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48359260 *Contribuyentes*: 333, Adriansm, Airunp, Ale flashero, Alexav8, Alvaro qc, Andreasmperu, Açipni-Lovrij, Banfield, Brindys, Bucho, Camilo, Cansado, CesarWoopi, Cobalttempest, Cookie, Corrector1, Cubacula, DJ Nietzsche, David0811, Diegusjaimes, Digigalos, Dodo, Elabra sanchez, Equi, Eric, Farisori, Fcr, Fernando Estel, Filipo, FrancoGG, Gaius iulius caesar, Greek, Götz, HUB, HighwaytoHell, Humberto, Isha, JMCC1, Jarfil, Jarke, Jkbw, Joseaperez, Josemanuel, Juanipicart, Kintaro, Ladymarion, Leonpolanco, Lluisrs, Lobo, Maaugaca, Magister Mathematicae, Matdrodes, Moriel, Mushii, Netito777, Nicop, Oscar ., Pan con queso, Pedro Nonualco, PoLuX124, Qwertymith, REOSarevok, Rastrojo, Raystorm, Rondador, Rovnet, Sabbut, Savh, Tamorlan, Tano4595, Tirithel, Togo, VenTech, Veon, Vic Fede, Yeza, 260 ediciones anónimas

Pirámide (geometría) *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48375522 *Contribuyentes*: Acekpo, Airunp, Antón Francho, Any Rand, Banfield, Barteik, Carmin, Chico512, Cinabrium, David0811, Delphidius, Dferg, Diegusjaimes, Dogor, Dreitmen, Eduardosalg, Emijrp, Fernando Estel, Gafotas, GermanX, Greek, Gusgus, Götz, HUB, Hprmedina, Isha, JMCC1, Jekter, Jkbw, Jugones55, Kineto007, Kpo312, Lucien leGrey, Mahadeva, Maria the beht, Matdrodes, Maugemv, MiguelAngel fotografo, Msdus, Muro de Aguas, Nemo, OGTz, Pablo rigel, Pan con queso, Pepelopex, Petruss, PhJ, Piagets, PoLuX124, Rondador, RoyFocker, Rαge, Snakefang, Tano4595, Tirithel, Tommy34, Vitamine, 212 ediciones anónimas

Prisma (geometría) *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48717342 *Contribuyentes*: Agguizar, Alvaro qc, Ascánder, Cal Jac02, Camilo, Catuno, Checho341, ChristianH, Cinabrium, Cobalttempest, Delphidius, Diegusjaimes, Digigalos, Echani, Eduardosalg, Erri4a, Filipo, Gusgus, Götz, JMCC1, Kuartas, Mafores, Magister Mathematicae, Matdrodes, Moriel, Msdus, Netito777, Pan con queso, Pati, Rondador, Taichi, Tano4595, Tirithel, Tostadora, 85 ediciones anónimas

Paralelepípedo *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=47762898 *Contribuyentes*: Antur, BuenaGente, Camilo, Charlitos, DJ Nietzsche, Dadada00, Danie1996, Diegusjaimes, Dodo, Echani, Edmenb, Er Komandante, Felix 780, Gaius iulius caesar, Gijzopium, Gsrdzl, Iulius1973, JRGL, Jesús E. Jaimes S., Jkbw, Locos epraix, Magister Mathematicae, Matdrodes, Mercenario97, Miguel303xm, Netito777, Nuel000, Petruss, PoLuX124, Psychophanta, Raulshc, Retama, Rondador, RoyFocker, Rαge, Sabbut, Super braulio, Taichi, Tano4595, Tirithel, Tomatejc, Truor, Unaiaia, 114 ediciones anónimas

Esfera *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48561424 *Contribuyentes*: Airunp, Aitorzubiaurre, Aldomann, Alhen, Antur, Antón Francho, Bachi 2805, Banfield, Belgrano, BlackBeast, Camilo, Carmin, Dark Bane, David0811, Davius, Diegusjaimes, Dodo, Don Equis, Dreitmen, EDUARDO CERCÓS, Eduardosalg, Egaida, Ejmeza, Elabra sanchez, Eligna, Eloy, Fede Threepwood, Fernando Estel, Fmariluis, FrancoGG, GermanX, Gonis, Götz, HUB, Hosg, Humberto, ILVI, Ivanfa, JMCC1, Jkbw, Jmcalderon, Johanmauro, Jorge c2010, Jose g, Joseaperez, Josemontero9, Joswold, Jsanchezes, Juan Marquez, KnightRider, Kved, Magister Mathematicae, Manwë, Matdrodes, Maxidigital, Moriel, Mortadelo2005, Ncc1701zzz, Netito777, Nicoluna, Nixón, Opinador, PACO, Paintman, PoLuX124, Rodrigo G, Romero Schmidtke, RubiksMaster110, Rαge, Sabbut, Santiperez, Spirit-Black-Wikipedista, Tano4595, Tilla, Tortillovsky, Varusso, Vic Fede, Wewe, conversion script, 295 ediciones anónimas

Cono (geometría) *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=47672593 *Contribuyentes*: 4WD, Aleposta, Alrome, ArwinJ, Balderai, BuenaGente, Cobalttempest, Dferg, Dibujon, Diegusjaimes, Digigalos, Dodo, Echani, Elabra sanchez, Fuegon, Gafotas, Galois76, GermanX, Gusbelluwiki, Götz, Hprmedina, JMCC1, Jag2k4, Jgalgarra, Jkbw, Jsanchezes, Laura Fiorucci, Mafores, Matdrodes, Micheletb, Misigon, Nethac DIU, Netito777, Oscar ., Pan con queso, Petronas, Petruss, PoLuX124, Portland, Raulshc, Rondador, RoyFocker, Sabbut, Shooke, Super braulio, Taichi, Tano4595, Technopat, Tirithel, Vitamine, XalD, 171 ediciones anónimas

Cilindro *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48583920 *Contribuyentes*: Aibdescalzo, Aldarion, AlemanI2.0, Amadís, Amanuense, Andreasmperu, Angel GN, Baiji, Balderai, Belgrano, Camilo, Chewie, ChristianH, Davius, Dferg, Diegusjaimes, Dodo, Drake 81, Eduardosalg, Ejmeza, El Moska, Elabra sanchez, Eligna, Eric, Erik Mora, Flaackoo, Fran89, Gato ocioso, Gelpgim22, GermanX, Humberto, JAGT, JMCC1, Jkbw, Joseaperez, Jsanchezes, Kved, Laura Fiorucci, Maleiva, Matdrodes, Miguel Zafra, Muscari, Netito777, OboeCrack, Paintman, Pan con queso, Petruss, PoLuX124, Queninosta, Qwertymith, Rallyfreak, Rastrojo, Raulshc, Rcerna, Rondador, Sanbec, Savh, Skadia, Snakefang, Thor8, Tomatejc, Tortillovsky, Tostadora, Walter closser, Xemuj, Zufs, 241 ediciones anónimas

Figura geométrica *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48278645 *Contribuyentes*: Adelpine, Adri33, Aibdescalzo, Airunp, Banfield, Belb, Camima, Carmin, David0811, Diegusjaimes, Dreyesbo, Ejmeza, Emiliodelatorrea, GermanX, HUB, JMCC1, Jkbw, JorgeGG, Larocka, Locovich, LuisArmandoRasteletti, Mafores, PersOnLine, Rosarinagazo, SITOMON, Tirithel, Wafry, Yakusin, 79 ediciones anónimas

Polígono *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48433312 *Contribuyentes*: .snoopy., 3scandal0, Alconmax, Alexav8, AlfonsoERomero, Angel GN, Argenz, Ascánder, Atilae, Balderai, Banfield, BlackBeast, Bolt58, Brindys, BuenaGente, Camilo, Camima, Carmin, ChristianH, Cinabrium, Dagane, Danielbogota12, Dermot, Dferg, Diegusjaimes, Dnu72, Dossier2, Dullyboy, Edslov, Eduardosalg, Edub, El de vio, Elabra sanchez, Elisardojm, Elliniká, Emiduronte, Error de inicio de sesión, FedericoMP, Feliciano, Fernando Estel, Foundling, Fsd141, Gaeddal, Gaius iulius caesar, Galaylua, Ggenellina, Googolplanck, Guanxito, Gusbelluwiki, Gusgus, Götz, Hosg, Hprmedina, Humberto, Ingenioso Hidalgo, Invadinado, JA Galán Baho, JAGT, JAQG, JMCC1, Jarke, Javierito92, Jechavarria4, Jkbw, Jorge c2010, Joseaperez, Josetxus, Jsanchezes, Juan Mayordomo, Julianpial, Julius C, Kn, Kved, LaH ToOz, Lasneyx, Latinweb, Laura Fiorucci, Lhaa munecka, Limbo@MX, Lobillo, Loco085, Lucien leGrey, Luis1970, Ma'ame Michu, Magister Mathematicae, Maleiva, Manuelt15, Mar del Sur, Markoszarrate, Matdrodes, Mel 23, Moriel, Mortadelo2005, Mpeinadopa, Nicop, Nixón, Norikesh, Petruss, Pilaf, PoLuX124, Proferichardperez, Qriztian, Racso, Rastrojo, Raystorm, Rockband1505, Roxana555, RoyFocker, Rαge, SaeedVilla, Savh, Sevino, Sigmanexus6, Snakeyes, Softed, Spirit-Black-Wikipedista, Sviar, Tano4595, Technopat, Theaingeruman, Tirithel, Tomatejc, Varano, Victormoz, Vitamine, Wmaster32, Xanom, Xavigivax, Xsm34, Xulio220, Xzit, Yayoloco, Youssefsan, Zocks, 516 ediciones anónimas

Polígono simple *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=46267139 *Contribuyentes*: Allforrous, Balderai, Dnu72, Fsanchezherrero, Matdrodes, 11 ediciones anónimas

Polígono convexo *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48253494 *Contribuyentes*: Allforrous, Balderai, Dferg, Diegusjaimes, Dnu72, Eduardosalg, GermanX, Götz, JMCC1, Luis1970, Magister Mathematicae, Manuelt15, Nuel000, Sabbut, Tartaglia, 44 ediciones anónimas

Polígono cóncavo *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=46353196 *Contribuyentes*: Allforrous, Balderai, Dnu72, Götz, JMCC1, Jkbw, Sabbut, Technopat, 9 ediciones anónimas

Polígono regular *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48746344 *Contribuyentes*: Açipni-Lovrij, Balderai, Barba roja, Boatbadly, Bucho, BuenaGente, Diegusjaimes, Dnu72, DrVino, Draxtreme, Dreitmen, Eduardosalg, El Hoy, Eligna, Emiduronte, GNM, Gothmog, Gusbelluwiki, Götz, HUB, Humbefa, Ialad, Javierito92, Jcaraballo, Jkbw, Jualmi, Juan camilo villanueva, Kved, Leugim1972, Lucien leGrey, Manuelt15, Matuk94, Millars, Miss Manzana, Netito777, NicolasAlejandro, Petruss, Retama, Richy, Rrmsjp, Rαge, Sabbut, Soulreaper, Super braulio, Taichi, Thingg, Usuario xxxxxx, Virgi, Vitamine, Wilfredor, 173 ediciones anónimas

Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes

Archivo:Geometria (Geometry).jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Geometria_(Geometry).jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Scan by Nick Michael

Archivo:Commons-logo.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Commons-logo.svg *Licencia*: logo *Contribuyentes*: SVG version was created by User:Grunt and cleaned up by 3247, based on the earlier PNG version, created by Reidab.

Archivo:Wiktionary-logo-es.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Wiktionary-logo-es.png *Licencia*: logo *Contribuyentes*: es:Usuario:Pybalo

Archivo:Wikiversity-logo-Snorky.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Wikiversity-logo-Snorky.svg *Licencia*: desconocido *Contribuyentes*: -

Imagen:Nuvola apps edu mathematics-p.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Nuvola_apps_edu_mathematics-p.svg *Licencia*: GNU Lesser General Public License *Contribuyentes*: David Vignoni (original icon); Flamurai (SVG convertion)

Imagen:Portal.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Portal.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes*: Portal.svg: Pepetps derivative work: Bitplane (talk)

Archivo:Oxyrhynchus papyrus with Euclid's Elements.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Oxyrhynchus_papyrus_with_Euclid's_Elements.jpg *Licencia*: desconocido *Contribuyentes*: -

Archivo:Title page of Sir Henry Billingsley's first English version of Euclid's Elements, 1570 (560x900).jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Title_page_of_Sir_Henry_Billingsley's_first_English_version_of_Euclid's_Elements,_1570_(560x900).jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Charles Thomas-Stanford

Archivo:Noneuclid.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Noneuclid.svg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: derivative work: Pbroks13 (talk) Noneuclid.png: Original uploader was Joshuabowman at en.wikipedia

Archivo:Hyperbolic tiling omnitruncated 3-7.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Hyperbolic_tiling_omnitruncated_3-7.png *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Davius, Jean-Christophe BENOIST, Kilom691, Marcus erronius

Archivo:Sphere wireframe 10deg 6r.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sphere_wireframe_10deg_6r.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution 3.0 *Contribuyentes*: Geek3

Archivo:Hexahedron.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Hexahedron.jpg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: Dbenbenn, Kjell André, Matthias M., Quasipalm, SharkD, Str4nd, WikipediaMaster, 1 ediciones anónimas

Archivo:Cube Animation.gif *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Cube_Animation.gif *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contribuyentes*: André Karwath aka Aka

Archivo:dice01.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Dice01.jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Original uploader was (Automated conversion) at en.wikipedia (Original text : LDC)

Archivo:Pyramid (geometry).png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Pyramid_(geometry).png *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User Sebbe.wigmo on sv.wikipedia

Archivo:Diagrama Piramide.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Diagrama_Piramide.jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Esteban Eduardo Arredondo Rosas

Archivo:Hexagon Octagon.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Hexagon_Octagon.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: BD2412, HB, INVERTED, JMCC1, Limaner, Prophecy94, Wst

Archivo:Apothem2.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Apothem2.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Personline

Archivo:Pythsats.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Pythsats.jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Original uploader was Softssa at sv.wikipedia

Archivo:Prisme.gif *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Prisme.gif *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: EugeneZelenko, Kilom691, Maximaximax, Oodzunadaira, Vmaurin

Archivo:Parallelepipedon.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Parallelepipedon.png *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:Sverdrup

Archivo:Parallelepipedon-orange.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Parallelepipedon-orange.png *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Baard Johan Svensson

Archivo:Esfera Arquímedes.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Esfera_Arquímedes.jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Andertxuman

Archivo:Sección de esfera por plano.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sección_de_esfera_por_plano.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: Original uploader was Romero Schmidtke at es.wikipedia

Archivo:Esferas secciones.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Esferas_secciones.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: Original uploader was Romero Schmidtke at es.wikipedia

Archivo:Coordenadas esféricas figura.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Coordenadas_esféricas_figura.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes*: Derivative work: Josemontero9 Coordenadas_eséricas_figura.png by Romero Schmidtke

Imagen:Octaedro regular.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Octaedro_regular.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: Original uploader was Romero Schmidtke at es.wikipedia

Imagen:Esfera con norma 3.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Esfera_con_norma_3.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: Original uploader was Romero Schmidtke at es.wikipedia

Archivo:Einstein gyro gravity probe b.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Einstein_gyro_gravity_probe_b.jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Aavindraa, Amandajm, Docu, GDK, Mattes, Phelipemancheno, Rimshot, Tano4595

Archivo:Cone.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Cone.jpg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: Conscious, Knutux, Ranveig

Archivo:Cone 3d.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Cone_3d.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes*: DemonDeLuxe (Dominique Toussaint)

Archivo:ConeDev.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:ConeDev.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0,2.5,2.0,1.0 *Contribuyentes*: HB

Archivo:Cono y secciones.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Cono_y_secciones.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Drini

Archivo:Doppelkegel.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Doppelkegel.png *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Kilom691, Svdmolen

Archivo:Cylinder geometry.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Cylinder_geometry.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:Ævar Arnfjörð Bjarmason

Archivo:ZylinderNetz.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:ZylinderNetz.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Traced by User:Stannered

Archivo:Quadric Elliptic Cylinder.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Quadric_Elliptic_Cylinder.jpg *Licencia*: Copyrighted free use *Contribuyentes*: Joe vom Titan, Newone, Pierreback, Salix alba

Archivo:Quadric Parabolic Cylinder.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Quadric_Parabolic_Cylinder.jpg *Licencia*: Copyrighted free use *Contribuyentes*: Cdang, Newone, Pierreback, Salix alba

Archivo:Quadric Hyperbolic Cylinder.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Quadric_Hyperbolic_Cylinder.jpg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: GeorgHH, Kameraad Pjotr, Lorentzo, Newone, Pierreback, Salix alba, Zscout370

Archivo:Shape Area.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Shape_Area.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Indolences

Archivo:Basic shapes.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Basic_shapes.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contribuyentes*: Vectors by w:User:MysidMysid, original by User:Elisabethd

Archivo:Dice analogy- 1 to 5 dimensions.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Dice_analogy-_1_to_5_dimensions.svg *Licencia*: Public domain *Contribuyentes*: en:User:Wdflake

Archivo:8-cell-simple.gif *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:8-cell-simple.gif *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Original uploader was JasonHise at en.wikipedia

Archivo:Assorted polygons.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Assorted_polygons.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: CountingPine

Archivo:PoliReg 17.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PoliReg_17.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:Simple polygon.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Simple_polygon.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Oleg Alexandrov

Archivo:Complex polygon.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Complex_polygon.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Editor-at-Large, AxelBoldt (original PNG)

Archivo:Decagon.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Decagon.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Badseed, Fibonacci, Maksim, Rocket000, Wst, Wutsje, 3 ediciones anónimas

Archivo:PoliReg 02.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PoliReg_02.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:PoliReg 07.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PoliReg_07.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:PoliReg 00.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PoliReg_00.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 03b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_03b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 04b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_04b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 05b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_05b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 06b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_06b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 07b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_07b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 08b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_08b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 09b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_09b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 10b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_10b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 11b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_11b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 12b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_12b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 13b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_13b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Image:Polig 14b.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polig_14b.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:PoliReg 03.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PoliReg_03.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:PoliReg 04.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PoliReg_04.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:PoliReg 08.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PoliReg_08.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:PoliReg 05.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PoliReg_05.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Archivo:PoliReg 06.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PoliReg_06.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Share Alike *Contribuyentes*: Dnu72

Licencia